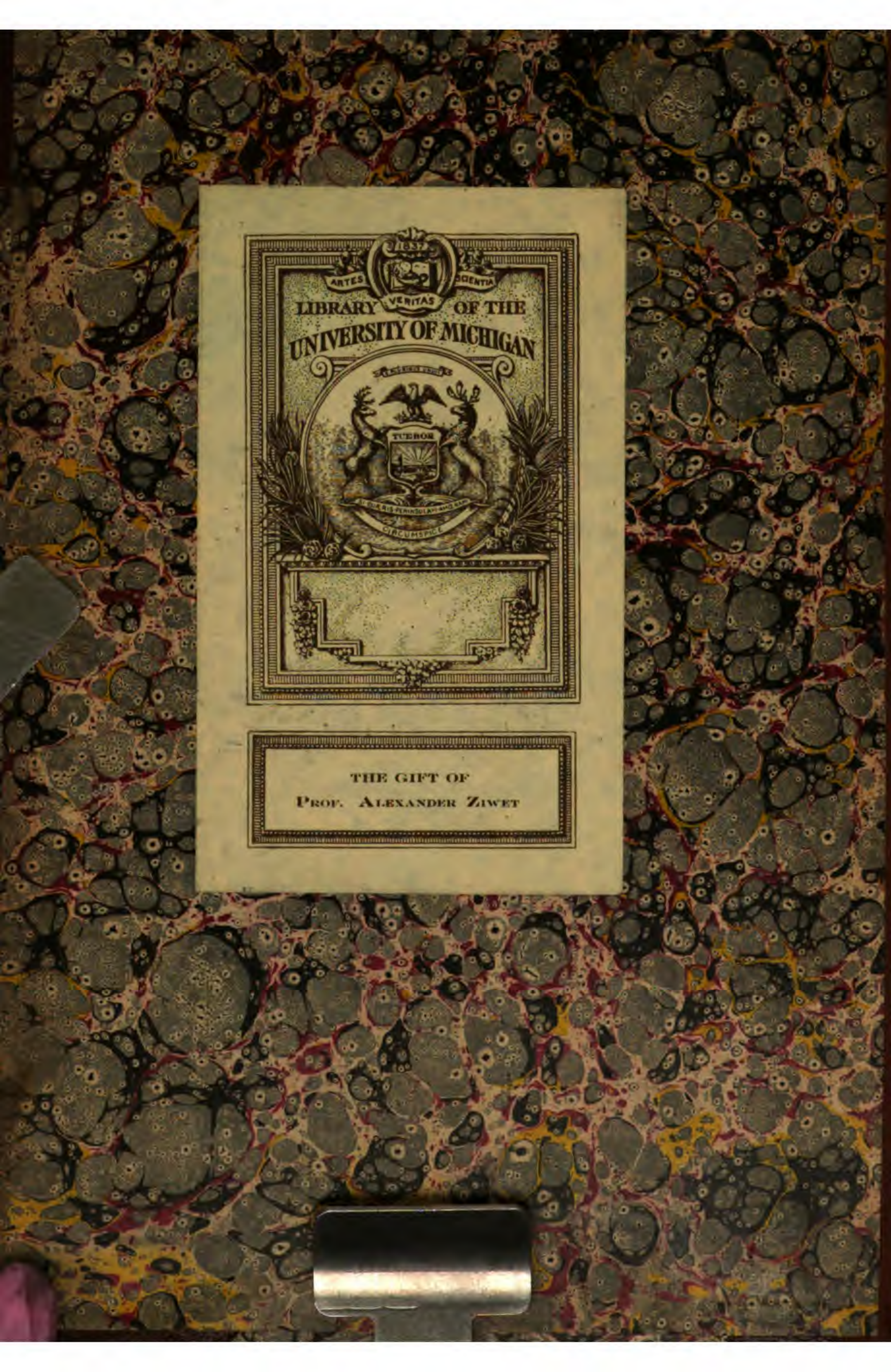




1837
ARTES
SCIENTIA
LIBRARY
VERITAS
OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE
THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET



INTRODUCTION A L'ÉTUDE

DES

THÉORIES DE LA MÉCANIQUE

Alexander Ziwet

INTRODUCTION A L'ÉTUDE

DES THÉORIES

DE LA MÉCANIQUE

PAR

HENRI BOUASSE

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

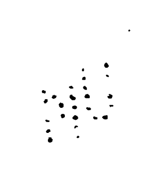
MAITRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE

PARIS

GEORGES CARRÉ, ÉDITEUR

3, RUE RACINE, 3

1895



AVERTISSEMENT

Ce livre est la reproduction d'un cours sur l'Histoire des Sciences, professé à la Faculté des Sciences de Toulouse pendant l'hiver 1893-94. On n'a cru devoir modifier, en le publiant, ni la forme de leçons, ni le style et l'allure de l'ouvrage.

Le lecteur voudra donc bien ne pas oublier, en le parcourant, qu'il est en présence, non pas d'un traité didactique, mais d'une série de leçons reproduites telles qu'elles ont été dites et s'adressant à des auditeurs qui, pour la plupart, s'occupaient plus spécialement de philosophie ou de sciences physiques.

Le but et le plan de l'ouvrage lui apparaîtront ainsi plus clairement.

ERRATA ✓

Page 69, ligne 14 au lieu de *poids* lire *point*.
— 128 — 3 à partir du bas, supprimez les mots *plus intense*.
— 155 — 2 et 3 à partir du bas au lieu de *3,600* lire *3600*.
— 182 — 10 au lieu de *spores* lire *pores*.
— 182 — 17 au lieu de « c'est-à-dire un milieu ; pour remuer les parties duquel... » lire « c'est-à-dire un milieu pour remuer les parties duquel... »
— 184 — 11 au lieu de « n'a de pas... » lire « n'a pas de... ».
— 215 — 11 au lieu de « con?ormes » lire « conformes ».
— 241 — 10 au lieu de « *Le principe fondamental, dit d'Alembert...* » lire « *Le principe fondamental, dit de d'Alembert* ».
— 244 — 1 au lieu de « *cette réunion de pièces ne soit* » lire « *cette réunion de pièces en soit* ».

CHAPITRE I

INTRODUCTION

DE LA NATURE DES EXPLICATIONS DES PHÉNOMÈNES NATURELS DANS LES SCIENCES EXPÉRIMENTALES [1]

Il me paraît nécessaire, avant de commencer, de faire une courte remarque sur la terminologie que j'emploierai. Chaque corps de métier a son langage, son jargon propre, et nous n'échappons pas à la règle commune. Les mots sont ainsi exposés à changer de sens suivant ceux qui s'en servent : d'où des ambiguïtés fâcheuses.

Forcé, dans cette introduction, d'user de mots auxquels les philosophes donnent un certain sens précis, et que les savants emploient dans une acception assez différente, je crois nécessaire de les définir préalablement.

C'est ainsi que j'emploierai le mot métaphysique dans le sens de philosophie naturelle ou de *métaphysique des sciences*, sans prétendre empiéter par là le moins du monde sur le domaine de la philosophie. La métaphysique — selon l'acception traditionnelle, peut-on dire,

[1] Ce premier chapitre a paru dans le numéro de mai de la *Revue de métaphysique et de morale.*

chez les savants — est l'ensemble des principes ou des données *a priori pratiquement* nécessaires à l'explication des faits.

Sans remonter au delà, je lis dans une traduction de la *Méthode des fluxions* de Newton : « La *métaphysique de la géométrie* était fixée depuis longtemps, celle du calcul infinitésimal ne l'est pas encore ». Cette même expression « métaphysique de la géométrie », pour signifier les axiomes et les méthodes de la géométrie, se retrouve dans une lettre de Descartes au Père Mersenne, de 1639.

Je lis dans l'*Histoire de l'Académie* (1703) de Fontenelle, à propos de la force des machines en général : « Nous en donnerons ici la métaphysique qui n'est pas moins démonstrative que la géométrie et qui est peut-être plus intelligible ». Cette métaphysique, c'est le principe des vitesses virtuelles assez mal énoncé.

Plus tard, en 1743, d'Alembert, dans la préface de sa *Dynamique*, parle *de la métaphysique des lois de la percussion*.

Au commencement du siècle, Carnot écrit un traité *sur la métaphysique du calcul infinitésimal*. Et, dans le courant de ce siècle, tous les mathématiciens, j'entends ceux qui ont fait métier de science, emploient le mot « métaphysique » dans le sens de l'ensemble des règles ou des raisonnements qui légitiment les méthodes des mathématiques ; tous les physiciens, dans le sens des propriétés données *a priori* à la matière, ou des lois posées *a priori* pour l'explication des phénomènes.

Aucune difficulté pour les mots objet et sujet. Ils sont passés dans le langage usuel, et les savants les emploient dans leur sens courant. On n'a qu'à relire dans l'*Acoustique* de Helmholtz tout ce qui a trait aux sensations subjectives

et dans son *Optique* tout ce qu'il dit des phosphènes, images accidentelles, etc.

Pour les mots substance, essence, etc., ils sont employés dans le sens de corps pondérables ou non, c'est-à-dire quelque chose qui peut se mesurer et qui a certaines qualités.

Quand un physiologiste parle de l'âme par rapport au corps, il veut dire l'ensemble des phénomènes connus par la conscience, par opposition avec les phénomènes physiques; si l'on veut, phénomènes psychiques par opposition aux phénomènes physiologiques.

C'est en ce sens que je pourrai dire que le problème de la relation de l'âme et du corps est de même ordre que celui de la communication du mouvement entre la matière et l'éther.

Enfin, quand je parlerai d'infiniment petits ou d'infiniment grands, on voudra bien ne voir là que des termes parfaitement définis en mathématique, ayant un sens précis.

En résumé, je prie ceux qui ont l'habitude de la pensée philosophique de bien vouloir oublier le sens qu'ils ont pu donner aux mots, de prendre les expressions que j'emploierai, ou bien dans leur sens le plus banal, celui avec lequel on les rencontre dans les journaux par exemple, ou bien dans le sens très précis que leur attribuent les savants, et dans ce cas j'aurai toujours le soin de les définir.

C'est donc, malgré l'apparence, à un point de vue exclusivement scientifique que sont envisagées dans cette introduction et dans tout l'ouvrage les notions fondamentales de la mécanique et l'histoire de leur développement. J'espère toutefois que cette étude servira, non seulement à ceux qui font métier de science, mais encore et peut

être principalement aux philosophes. Il suffit de remarquer que ceux qui ont construit la mécanique étaient à la fois des savants et des philosophes et que leurs travaux scientifiques et philosophiques sont liés intimement ; on ne peut vraiment comprendre les uns sans avoir plus qu'une connaissance superficielle des autres.

*
* *

Qu'est-ce qu'une *explication* dans les sciences naturelles ?

Il est capital de préciser le caractère de ces explications, afin de savoir ce qu'on peut raisonnablement exiger de ces sciences, et ce qu'il serait puéril et inutile de leur demander. Tel est l'objet de ce premier chapitre; telle est aussi l'idée directrice et fondamentale de cet ouvrage.

Or, voici d'avance et d'une façon très générale, pour rendre plus aisées les discussions qui vont suivre, les résultats auxquels nous aboutirons et dans ce chapitre et dans cet ouvrage.

Il y a deux conditions fondamentales sous lesquelles nous imaginons les phénomènes : le *temps* et l'*espace*.

Il y a, en outre, des principes *intellectuels*, soit *évidents*. (les principes logiques), soit d'une évidence presque logique (les principes mathématiques), qui s'appliquent au temps et à l'espace lui-même.

De plus, la sensation nous fournit un certain nombre d'états de conscience, parmi lesquels on a de tout temps distingué celui ou ceux (peu importe pour la question présente) auxquels correspondent les trois espèces de phénomènes que nous désignons en mécanique sous le nom de *forces*, de *chocs* et de *travaux*.

Or expliquer la nature, c'est ramener les phénomènes à ce qui est l'objet de ces trois états de conscience, soit à des *forces*, soit à des *chocs*, soit à des *travaux*. Par quels procédés y parvient-on? En d'autres termes, comment crée-t-on une science expérimentale ?

La première nécessité est de classer les phénomènes dans des cadres appelés *lois*. Nous étudierons donc les diverses méthodes qui ont pu servir à ce but, et nous aurons soin de distinguer celles qu'on pourrait imaginer de la seule qui ait jamais servi. Ces lois résument les résultats des expériences : elles leur donnent par le postulat de la méthode inductive une généralité plus grande ; et surtout, enfin, elles expriment mathématiquement les relations des phénomènes.

Les lois découvertes, nous les réunissons entre elles dans des cadres artificiels plus vastes appelés *théories*. De ces théories nous déterminerons la valeur, nous discuterons la nécessité objective. Nous reconnaîtrons ainsi que la partie essentielle, certaine, de ces théories, est ce qu'on appelle les *équations différentielles*, c'est-à-dire des formes très générales qui embrassent une infinité de phénomènes particuliers.

Nous classerons à leur tour ces formes, pour chercher si certaines d'entre elles n'auraient pas quelque importance, soit objective, soit subjective, plus particulière.

Et, parmi toutes, nous distinguerons précisément celles qui relient au temps et à l'espace les forces, les travaux et les chocs. Celles-là sont ou nous paraissent fondamentales, parce que, répondant aux états de conscience, qui seuls nous paraissent transmis directement du dehors, elles nous semblent nécessairement avoir leur contre-partie objective dans les phénomènes.

Ces formes, nous essayerons de les dégager de leur représentation perceptible ; nous parviendrons peu à peu à les considérer comme l'explication définitive des choses ; ajoutons, pour anticiper sur nos dernières conclusions — explication singulièrement incomplète : — nous démontrerons ainsi notre impossibilité absolue à rien imaginer de concret, hors nos états de conscience, l'inanité de toutes les explications métaphysiques, l'aboutissement à une explication *formelle* et *algorithmique* des choses.

I

Il est banal de dire que nous ne comprenons que très imparfaitement les notions les plus vulgaires et les plus simples en apparence. Dès que nous cherchons à approfondir les idées d'espace et de temps, nous rencontrons de telles difficultés que le savant se contente d'admettre l'espace et le temps et leurs propriétés en manière de postulat. Car, outre que l'on ne peut tout expliquer sans tomber dans un cercle vicieux, les explications seraient ici plus obscures que les notions à élucider. D'ailleurs, *sans prendre cette proposition autrement qu'en un sens expérimental*, que ce soit la réalité ou des formes de notre manière de penser, nous vivons dans l'espace et le temps, et cela suffit pour que nous croyons comprendre nettement (j'*entends au sens pratique*) ce que renferment ces notions.

En fin de compte, tout ce que nous connaissons du monde extérieur se réduit à une série d'états de conscience se déroulant dans le temps, dont nous objectivons les causes

dans l'espace à l'aide de procédés d'un mécanisme tout à fait inconnu, procédés que nous appelons *sensations* et que nous localisons dans des organes spéciaux, les *sens*. Ce n'est évidemment pas le lieu de discuter la question de la réalité extérieure de ces causes, de décider si elles sont antérieures à l'état de conscience ou postérieures, en un mot, si le monde existe ou si nous le construisons : cela importe fort peu dans les études actuelles.

Cherchons à classer ces états de conscience correspondant aux sensations et à en déterminer le degré de clarté. Le sens du *toucher* et le sens musculaire nous fournissent les plus importantes : notion d'*effort*, un poids qu'on tient soulevé ; notion de *choc*, une balle qui vous heurte ; notion de *travail*, un corps que l'on soulève ; notion de température.

Bien qu'à proprement parler ces notions soient aussi claires, si l'on veut, aussi obscures les unes que les autres, il ne nous en semble pas ainsi, et l'on a toujours accordé aux trois premières notions fournies par le sens du toucher une facilité plus grande à être comprises. Aussi, depuis les temps les plus reculés, les physiciens — ce terme étant pris dans le sens le plus vaste — se sont efforcés de tout ramener à des pressions, des chocs et des travaux.

Ainsi les anciens, Pythagore, Épicure, Lucrèce, considéraient la vision comme une sorte de toucher, imaginaient que les rayons visuels palpaient l'objet regardé. Aristote, dont les idées sont les plus nettes sur ce sujet, concevait un milieu intermédiaire entre l'objet et l'œil, et Descartes lui-même se représente la sensation lumineuse comme un choc. Voici comment il s'exprime dans sa *Dioptrique* : « Il vous est bien sans doute arrivé quelque-

fois en marchant de nuit sans flambeau, par des lieux un peu difficiles, qu'il fallait vous aider d'un bâton pour vous conduire, et vous avez pu remarquer que vous sentiez, par l'entremise de ce bâton, les divers objets qui se rencontraient autour de vous... Et, pour bien tirer une comparaison de ceci, je désire que vous pensiez que la lumière n'est autre chose, dans les corps qu'on nomme lumineux, qu'un certain mouvement ou une action fort prompte et fort vive qui passe vers nos yeux par l'entremise de l'air et des autres corps transparents, en même façon que le mouvement ou la résistance des corps que rencontre un aveugle, passe vers sa main par l'entremise de son bâton ». Nos idées sur le mécanisme de la vision, pour être plus précises, n'en sont pas moins du même ordre.

Pour le son, on eut plus tôt une notion exacte de la façon dont il se transmettait à l'oreille; Aristote savait que c'est l'air qui lui sert de véhicule, et depuis très longtemps on attribue la sensation auditive à des impulsions communiquées par l'air au tympan.

Laissons de côté les sensations du goût et de l'odorat, sur lesquelles on ne sait encore absolument rien et qui sont tellement subjectives qu'elles échappent pour ainsi dire aux procédés de la science. Il est remarquable que, dès Aristote, on expliquait la sensation de température par l'action de particules en mouvement extraordinairement petites et prodigieusement rapides. Descartes se représente ainsi la chaleur : « C'est une agitation des petites parties des corps terrestres, qu'on nomme en eux la chaleur, principalement lorsqu'elle est plus grande que de coutume, et qu'elle peut mouvoir assez fort les nerfs de nos mains pour être sentie ; » et il ajoute un peu plus loin : « Ce mouvement étant une fois excité dans les corps

y doit demeurer jusqu'à ce qu'il puisse être transféré à d'autres corps ».

Pour quelles raisons le choc, le travail et l'effort ont toujours été plus ou moins obscurément regardés comme des phénomènes fondamentaux, c'est ce que nous n'avons pas à examiner ici. Une de ces raisons est sans doute que notre esprit répugne à admettre une action quelconque sans qu'il y ait contact : nous voulons que la cause soit prochaine et dans le temps et dans l'espace. Non seulement une cause doit précéder son effet ; encore voulons-nous en saisir la relation pour ainsi dire apparente. Et, de cette disposition même, peut-être pourrait-on trouver dans les lois de la pensée quelque cause plus profonde.

Pour Descartes, en particulier, il est possible que l'espoir d'une adaptation aisée de ces phénomènes aux formes mathématiques, et plus généralement à la forme universelle d'intelligibilité dont les mathématiques fournissent seulement un type, selon lui, soit la vraie raison de son choix : d'autant plus qu'il avait découvert à quelles unités rapporter la mesure du choc et du travail.

En définitive, nous trouvons à la base de toutes les sciences de la nature, outre l'espace et le temps, notions sous lesquelles nous concevons toujours les phénomènes, trois notions immédiates et fondamentales : premièrement l'*effort*, poids qu'on supporte, mur qui résiste, tension d'une corde ; secondement, le *choc* ou l'impulsion, heurt d'un corps en mouvement, arrêt brusque de notre corps sur un obstacle ; troisièmement, le *travail*, chariot qu'on traîne, poids qu'on soulève, généralement tout ce qui implique mouvement et fatigue. Puisque nous ne pouvons rien savoir du monde extérieur que ce qui nous est transmis de lui par les sens, puisque le résultat de la perception

se borne qualitativement à des états de conscience que nous voyons l'esprit humain tendre toujours à ramener à trois notions qu'il considère comme fondamentales, les explications du monde extérieur vont reposer nécessairement sur ces notions.

Mais il faut y ajouter de nouveaux éléments.

Ce sont les *principes ou postulats indémontrables*.

Ce sont d'abord les principes *logiques d'identité et de contradiction*.

Puis, d'autres dont les liens avec les formes mêmes de notre pensée sont si intimes qu'ils nous paraissent incontestables. On les admet comme axiomes et on en tire les sciences mathématiques.

Ainsi, à l'aide des principes d'*identité* et de *contradiction*, des axiomes mathématiques, on est parvenu à construire les mathématiques, l'algèbre et les diverses méthodes de calcul. En y joignant la notion d'*espace*, on a établi la *géométrie*.

En y joignant la notion de *temps*, on a établi la *cinématique*, qui est la science du mouvement considéré indépendamment des causes qui le produisent. Ces diverses sciences ne sont qu'un prolongement de la *logique*, ont identiquement le même degré de certitude, et ce serait faire une étrange méprise que de croire que les mathématiciens ont douté le moins du monde de cette certitude, parce qu'ils ont inventé une géométrie non euclidienne et une théorie de l'espace à quatre dimensions. Ces diverses méthodes de calcul sont des ensembles d'algorithmes; ce ne sont pas des représentations de quelque chose qu'on suppose exister objectivement. Quand un géomètre prétend que deux cercles concentriques se coupent toujours en quatre points qui sont à l'infini, il est clair que ce

n'est là qu'une manière commode d'exprimer un certain résultat de calcul et qu'il ne fait que retrouver une généralisation conventionnelle qu'il avait implicitement introduite dans ses formules.

II

Mais, en dehors des principes précédents, des principes *intellectuels*, comme les appelle Mariotte, et des principes *mathématiques*, qui n'en sont que le développement, en dehors aussi des faits expérimentaux, il y a les principes que, faute d'un nom meilleur, nous appellerons *métaphysiques*. Il s'agit de déterminer l'importance de ces deux ordres d'éléments et de limiter leur usage.

Il est incontestable qu'à la base des sciences de la nature se trouve l'expérience, mais il ne l'est pas moins qu'on y rencontre des principes métaphysiques; et nous croyons utile de le bien mettre en évidence. Et, puisque le premier effort du savant est de ranger les phénomènes sous des lois, comment parvient-il à les découvrir?

On a voulu distinguer deux méthodes de recherche, la méthode déductive qu'on peut appeler *métaphysique*, et la méthode inductive, *expérimentale* ou *physique*. Descartes est censé avoir employé la première, dont il expose les principes dans le *Discours de la Méthode* : « J'ai remarqué, dit-il, certaines lois que Dieu a tellement établies dans la nature et dont il a imprimé de telles notions en nos âmes, qu'après y avoir fait assez de réflexion nous ne saurions douter qu'elles ne soient exactement observées en tout ce qui est ou se fait dans le monde ». C'est ainsi que, sur l'immutabilité de Dieu, il appuie son

grand principe de la conservation de la quantité absolue de mouvement. De même, c'est en supposant *a priori* la simplicité des lois de la nature que Galilée découvre celles de la chute des corps.

Cette méthode serait inattaquable s'il existait en fait des principes métaphysiques aussi évidents que Descartes le veut bien supposer et assez précis pour qu'effectivement on en puisse déduire le détail des phénomènes. Ces conditions, si elles étaient satisfaites, rendraient superflues toutes vérifications expérimentales et les sciences de la nature auraient le même degré de certitude que la logique et les mathématiques.

Mais il n'en est point ainsi. Pour ce qui est de la non-évidence des principes métaphysiques que leur trop grande généralité ne rend pas illusoires dans l'application, un seul fait la prouvera sans réplique : c'est à savoir que Descartes lui-même a varié dans ses explications, et l'on ne peut admettre comme possédant les caractères de l'évidence des propositions qu'un esprit aussi supérieur a mis tant d'années à découvrir.

En second lieu, il avoue lui-même que ses principes sont trop vagues pour que par le seul raisonnement on en déduise le détail des phénomènes, et voici dans quels termes il fait de sa méthode même une piquante critique: « Premièrement, dit-il, j'ai tâché de trouver en général les principes ou premières causes de tout ce qui est ou peut être dans le monde, sans rien considérer pour cet effet que Dieu seul qui l'a créé, ni les tirer d'ailleurs que de certaines sentences de vérité qui sont naturellement dans nos âmes. Après cela, j'ai examiné quels étaient les premiers et plus ordinaires effets qu'on devait déduire de ces causes, et il me semble que, par là, j'ai trouvé des

cieux, des astres, une terre ; et même, sur la terre, de l'eau, de l'air, du feu, des minéraux et quelques autres telles choses qui sont les plus communes de toutes et les plus simples et, par conséquent, les plus aisées à connaître. Puis, lorsque j'ai voulu descendre à celles qui étaient plus particulières, il s'en est tant présenté à moi de diverses, que je n'ai pas cru qu'il fût possible à l'esprit humain de distinguer les formes ou espèces de corps qui sont sur la terre d'une infinité d'autres qui pourraient y être, si c'eût été le vouloir de Dieu de les y mettre, ni par conséquent de les rapporter à notre usage, si ce n'est qu'on vienne au-devant des causes par les effets, et qu'on se serve de plusieurs expériences particulières. »

Ce qui veut dire que ses principes le laissaient en présence d'indéterminations qu'il ne pouvait trancher qu'à l'aide d'expériences : et le fait est que toujours du principe de l'immutalibité divine, Malebranche concluait la conservation de la quantité de mouvement non plus absolue, comme avait fait Descartes, mais dirigée.

Il y a donc un double écueil contre lequel vient buter la méthode déductive: ou les principes sont précis, et leur forme même leur enlève de l'évidence ; ou bien ils peuvent être admis sans discussion, mais leur généralité les condamne au vague et les rend pratiquement illusoires.

La seconde *méthode*, dite *expérimentale*, consisterait à partir de l'expérience et à remonter sans l'aide d'aucun principe métaphysique, excepté peut-être le postulat fondamental de toute induction, à des groupements de faits ou lois de plus en plus généraux, jusqu'aux principes métaphysiques eux-mêmes qui trouveraient ainsi leur démonstration *a posteriori*. Cette méthode est un pur non-sens pratique et théorique.

Un non-sens théorique parce que, malgré qu'on en ait, on ne peut se passer de principes métaphysiques, indémontrables : par exemple, celui de la permanence et de l'existence même des lois de la nature, qui est à la base de toute expérience et qui légitime toute induction. Un non-sens pratique, parce qu'aucune expérience n'a jamais abouti à un progrès lorsque le savant qui la tentait n'était pas guidé par quelque préjugé, quelque construction *a priori* dont il se proposait de vérifier la solidité. Supposez l'homme le plus intelligent, répétez devant lui les expériences de Rumford sur le frottement, montrez-lui que le forage des canons entraîne un notable dégagement de chaleur, que la balle du fusil s'échauffe en s'écrasant lorsqu'elle frappe un obstacle dur, si cet homme n'est pas guidé par un principe métaphysique sur la transformation possible des travaux et leur conservation, il ne découvrira pas l'équivalence de la chaleur et du travail. Et, inversement, le philosophe privé de tout contrôle expérimental pourra bien soupçonner vaguement une liaison entre la destruction d'un travail et le gain de quelque chose d'équivalent ; il ne parviendra pas à démontrer *a priori* que ce quelque chose est de la chaleur et qu'il faut précisément détruire 425 kilogrammètres pour retrouver une calorie. L'histoire corrobore nos raisonnements. Mayer a découvert le principe de l'équivalence parce que, par la tournure habituelle de ses méditations, il croyait à une corrélation intime entre les manifestations du travail, ce qui était un principe métaphysique, et parce que Rumford et Colding*) avaient publié des expériences qui imposaient à ses déductions une forme précise.

Ainsi il n'existe qu'une seule méthode dans les sciences naturelles qui est un mélange de la méthode déductive et

*) Mayer knew nothing of Colding's work

de la méthode inductive. Tout savant doit avoir une métaphysique au moins rudimentaire qu'il tente de vérifier par l'expérience, quitte à la modifier si les faits lui sont contradictoires. Et au fond il n'est guère difficile de montrer que tous les savants, je dis tous ceux à qui la science doit un progrès, ont procédé comme je viens de le dire ; à commencer par Descartes, bien qu'il soit banal de soutenir le contraire.

A la fin du siècle dernier, c'était avec un mépris non dissimulé que l'on parlait de Descartes physicien. Montucla juge ainsi sa dynamique : « C'est un tissu d'erreurs, de contradictions qui ne mériteraient pas d'être discutées sans la célébrité de leur auteur, » opinion que je suis loin de partager. Il semble qu'on revienne sur cette appréciation, et dernièrement M. Fouillée se constituait le champion de Descartes, champion plus zélé que prudent ; à l'en croire, nous serions en recul sur Descartes, ce qui est peut-être un peu exagéré. A dire vrai, il est regrettable que la manière dont Descartes expose ses très remarquables idées sur la nature donne le change; et même de bons esprits s'y sont laissés prendre. On ne doit pas toujours croire les savants sur parole et s'imaginer qu'ils font leurs découvertes comme ils veulent bien le raconter. A ce propos, on peut citer un exemple caractéristique. On sait que Fresnel découvrit les lois de la double réfraction; dans un mémoire qui est un impérissable chef-d'œuvre, il les expose en les déduisant de certaines idées sur la constitution de la matière; de sorte que, jusqu'à la publication de ses œuvres complètes, en 1866, on crut qu'elles s'étaient présentées à son esprit sous cette forme; les partisans de la méthode déductive pourraient triompher, si cette publication n'avait mis au jour la version

primitive de son mémoire. Les lois de la double réfraction y sont déduites d'une généralisation très simple, bien que très profonde de lois découvertes par Huyghens. C'est une manie très généralement répandue de systématiser *a posteriori* ses actions et ses pensées et de les faire dériver de préméditations complètement imaginaires. Car il est agréable de se figurer qu'on a retrouvé, pour ainsi dire recréé le monde par un simple effort logique. Nous sommes d'autant plus portés à croire que Descartes n'a pas échappé à ce travers que ses lettres sont là pour témoigner de ses variations ; que, de plus, elles le montrent beaucoup moins dédaigneux des expériences qu'on le veut bien croire. C'était un piètre expérimentateur, mais, à l'époque où il vivait, les physiciens n'étaient généralement pas fort habiles. Selon l'habitude des savants d'alors, il s'attaquait à des problèmes expérimentaux trop complexes. « Sans être trop curieux, dit-il dans une lettre datée de 1629, à rechercher toutes les particularités touchant une matière, il faudrait principalement faire des recueils généraux de toutes les choses les plus communes et qui sont très certaines et qui peuvent se savoir sans dépense; car ce sont celles qui servent infailliblement en la recherche de la vérité. Pour les plus particulières, il est impossible qu'on n'en fasse beaucoup de superflues et même de fausses, si on ne connaît la vérité des choses avant que de les faire. » Mais aujourd'hui même quel physicien oserait s'attaquer directement à un problème difficile, réflexion cristalline par exemple, sans être guidé par une théorie à démontrer ou à combattre; quel chimiste se ferait fort de débrouiller une réaction compliquée, sans préjuger du résultat à obtenir? Descartes, il est vrai, dans la même lettre demande que l'on recherche si « toutes

les coquilles sont tournées dans le même sens et si c'est le même au-delà de l'équinoxial ; si le corps de tous les animaux est divisé en trois parties, *caput*, *pectus*, *ventrem ;* et ainsi des autres ». Mais qu'on feuillette les physiques d'alors, et l'on verra les singulières questions que se posaient les chercheurs; et les chimistes semblaient se donner le mot pour ne distiller, ne cohober, ne manipuler que les substances les plus étranges et les moins définies.

On objectera que Descartes, une fois en possession de ses principes, n'en voulut plus démordre lorsque les faits vinrent les contredire. Assurément il eut tort; toutefois a-t-on raison de dire avec Montucla que « l'unique source de ses erreurs est l'esprit systématique auquel il se livra avec trop de confiance et sans consulter assez l'expérience ». Nous ne le croyons pas. Qu'on se mette à la place du savant qui a construit une théorie assez générale pour embrasser un grand nombre de phénomènes; ne sera-t-on pas porté à croire que, si quelques faits isolés ne cadrent pas avec le système général, c'est qu'on n'a pas encore trouvé le biais convenable. Voici par exemple l'illustre géomètre Poisson qui parvint, à l'aide de la théorie de l'émission, à rendre raison de plusieurs expériences de l'optique ; Fresnel lui opposa le système des ondulations et combattit victorieusement ses idées. Poisson n'en continua pas moins à croire à l'excellence de sa théorie et mourut impénitent. On conçoit très bien que Descartes, qui, à l'aide de sa loi de réfraction, avait expliqué complètement les propriétés des lentilles, put écrire au Père Mersenne dans une lettre datée de 1638: « Je me moque du sieur Petit et de ses paroles. Et on n'a pas, ce me semble, plus de sujet de l'écouter, lorsqu'il promet de

réfuter mes réfractions par l'expérience, que s'il voulait faire voir avec quelque mauvaise équerre que les trois angles d'un triangle ne seraient pas égaux à deux droits ; mais je ne saurais empêcher qu'il y ait des médisants et des crédules. Tout ce que je puis, c'est de les mépriser ; ce que je fais de telle façon, que si je pouvais aussi bien vous le persuader, je m'assure que vous ne prendriez plus la peine de m'envoyer de leurs papiers ou de leurs nouvelles, ni même de les écouter. » Cette lettre donne, en passant, le ton de la polémique entre savants au XVIIe siècle. Ce qui n'empêche pas, dans la même lettre, que Descartes ne prie le Père Mersenne de lui envoyer toutes les observations qu'il pourra se procurer sur les météores et d'en faire bon profit.

Une remarque assez piquante prouve combien Descartes s'illusionnait lui-même sur le degré d'*apriori* de son explication de la nature. A chaque instant, à propos de tout, il avertit ses correspondants qu'ils ne pourront comprendre toute sa pensée qu'après qu'il aura publié ses principes, et l'on voit d'après les réponses que la connaissance des principes était fort inutile pour entrer dans ses vues. Et de fait, pour qui n'est pas prévenu, ses écrits sur les sciences naturelles pourraient être signés par un savant positiviste.

Voici une autre remarque non moins curieuse : une des plus lourdes erreurs de Descartes vient de ce qu'il a mal appliqué ses principes et non pas de ce qu'il les a suivis, comme nous le verrons à propos du choc.

Ainsi, guidé par une métaphysique plus ou moins systématique et très souvent enfantine, le savant découvre des relations entre les phénomènes qu'il généralise par induction, puis énonce sous forme de lois.

III

Entre ces lois elles-mêmes, il cherche à faire des classifications ; il invente des procédés artificiels de groupement appelés *théories*. Il se présente donc un important problème à résoudre, à savoir quelle est la réalité objective de ces théories. Si nous parvenons à montrer que cette réalité est tout illusoire, nous aurons banni l'espoir d'arriver à une explication métaphysique définitive et incontestable du monde : il vaut donc la peine que nous insistions.

On ne saurait douter que des faits peu nombreux ne puissent recevoir plusieurs interprétations. Descartes, dans une lettre de 1640, dit à ce propos : « Je vois bien qu'on peut expliquer un même effet particulier en diverses façons qui soient possibles, mais je crois qu'on ne peut expliquer la possibilité des choses en général que d'une seule façon qui est la vraie. » Et dans une autre lettre de la même année, on trouve : « Pour la physique je croirais n'y rien savoir, si je ne savais que dire comment les choses peuvent être, sans démontrer qu'elles ne peuvent être autrement ; car, l'ayant réduite aux lois des mathématiques, cela est possible et je crois le pouvoir en tout ce que je crois savoir. » Nous ne contestons pas que plus augmente le nombre des lois à relier entre elles, plus diminue le nombre des moyens d'y parvenir ; conséquemment nous pouvons accorder à Descartes que l'explication des choses en général est unique, et nous n'en serons pas plus avancé après cela. Car, puisqu'il est de la nature de l'esprit de l'homme de ne connaître qu'un nombre de lois

très restreint et essentiellement fini, nous ne pourrons pas conclure que pour l'homme il ne puisse jamais exister qu'une seule interprétation possible du monde.

Pratiquement, aucune partie des sciences naturelles n'est assez riche de lois, pour qu'on puisse, grâce à elles, débouter de leurs prétentions toutes les théories proposées, sauf une. On pourrait même soutenir avec beaucoup de vraisemblance que toutes les théories actuellement admises n'ont aucunes chances de longévité. En tous cas, même pour les sciences particulières les plus avancées, on peut déduire les phénomènes connus de principes absolument contradictoires. Appuyons cette affirmation de quelques exemples.

Prise en gros, la théorie des ondulations est très satisfaisante. Cependant, si elle rend compte des phénomènes dans leur ensemble, elle n'est dans le détail qu'un assemblage assez étrange de pièces disparates, qu'on ne cherche même plus à joindre et sur lesquelles les savants ne se lassent pas de discuter. L'éther, impondérable, sans masse, qui est censé transmettre la lumière, est un fluide pour sa facilité à se laisser traverser par les corps et, pour ainsi dire, à les imprégner ; c'est un solide par rapport aux oscillations qu'il transmet. De ce solide singulier, les physiciens ont les idées les plus contradictoires. Pour les uns il est infiniment compressible, infiniment plus que les gaz ; pour les autres, il l'est infiniment peu, beaucoup moins que l'acier le plus dur. Actuellement deux théories principales sont en présence : si l'une indique une vibration verticale dans l'éther, l'autre exige une vibration horizontale. Depuis cinquante ans on a mis tout en œuvre pour trancher le différend en faveur de l'une ou l'autre, elles conservent leurs positions : aucun phéno-

mène ne permet jusqu'à présent de discerner quelle est la véritable. Peut-être le sont-elles également, puisqu'elles conduisent aux mêmes formules numériques ; mais nous développerons plus loin cet aperçu. En outre, elles ne sont plus les seules, et de temps à autre l'optique s'enrichit d'une nouvelle théorie, contradictoire avec les précédentes, du moins dans ses hypothèses fondamentales, équivalente dans ses conclusions vérifiables par l'expérience.

On en dirait autant des phénomènes électriques. Qu'on feuillette l'ouvrage de l'illustre Maxwell ; à tous les chapitres il change sa manière de concevoir les phénomènes électriques : trois ou quatre théories se superposent, inconciliables, mais conduisant aux mêmes équations.

Assurément, chaque fois qu'une loi nouvelle est découverte, un certain nombre de théories se trouvent éliminées du coup, et celles qui résistent doivent généralement se modifier, s'étendre ou se limiter suivant les cas. C'est ce que M. Hirn, connu par ses admirables travaux en thermodynamique et surtout par la profondeur de ses vues philosophiques, fait remarquer à propos du principe de l'équivalence. « Il y a, dit-il, une différence immense entre l'ancienne assertion de la physique, selon laquelle la chaleur reste toujours qualitativement et quantitativement la même, et l'assertion toute moderne que la chaleur disparaît, échappe à nos moyens d'investigation par cette seule raison qu'elle a donné lieu à un travail mécanique. Cette différence s'est reflétée nécessairement sur les interprétations par lesquelles nous essayons de nous rendre compte de la nature du calorique ; elle a imposé à ces interprétations des conditions d'existence beaucoup mieux définies et resserrées. La nouvelle doctrine a ainsi pro-

voqué la naissance d'interprétations nouvelles aussi, plus en harmonie avec l'ensemble des faits connus; mais ce n'est sur aucune de ces interprétations en particulier qu'elle repose réellement. »

Ce point est très important à élucider ; car, pour bien des gens, la thermodynamique repose sur cette hypothèse que la force en général n'est absolument qu'un mode du mouvement de la matière, et selon eux cette assertion serait la seule qui satisfît aux données expérimentales. L'hypothèse métaphysique relative à la nature du calorique serait unique, imposée par les faits ; ils se figurent même qu'elle est la seule posée par les fondateurs de la thermodynamique.

Hirn rappelle que les trois hommes éminents qui ont formulé les principes nouveaux, sont partis chacun d'une idée différente non seulement quant à la chaleur, mais quant à la nature de la force en général. « Du rapport continu qui existe entre la gravitation et les mouvements qu'elle produit, nous ne saurions toutefois conclure que l'essence de la gravité est un mouvement, et cette conclusion s'étendrait tout aussi peu à la chaleur. Bien loin de là, nous sommes amenés à formuler tout le contraire et à dire que, pour devenir chaleur, il faut que le mouvement, qu'il soit d'ailleurs continu ou vibratoire, cesse d'être mouvement. » Ainsi s'exprime le Dr Mayer. Colding a été plus loin encore. Il considère la force en général comme une essence spécifique susceptible de transformations et de perfectionnements successifs. M. Joule a défendu l'idée contraire, et pour lui la chaleur ne serait qu'un mode du mouvement de la matière. Mais tous trois arrivent aux mêmes équations et, par conséquent, aux mêmes conséquences vérifiables par l'expérience.

Ainsi on ne peut pas dire avec Descartes qu'il existe, au moins actuellement, une seule interprétation du monde. Dans toutes les parties de la physique on trouve plusieurs théories qui sont également recevables; cherchons dans quel cas elles peuvent être considérées comme équivalentes et ce qui en est la partie essentielle.

Nous avons fait déjà remarquer que, si plusieurs théories étaient également acceptables, c'est qu'elles conduisaient aux mêmes équations ou bien à des équations si peu différentes que la précision limitée des expériences permet de les confondre. Or les équations, qui ne sont pas autre chose que des relations exprimées entre diverses grandeurs par le moyen des symboles de l'algèbre, peuvent être de deux formes. Ou bien elles expriment ces relations dans des conditions complètement déterminées; elles permettent, par exemple, de calculer la distribution de l'électricité sur un ellipsoïde isolé dans l'espace ou placé devant un autre corps électrisé dont la surface et la charge sont connues: elles sont dites alors sous forme finie et ne conviennent qu'aux phénomènes très particuliers pour lesquels elles ont été établies. Ou bien les équations dites sous forme différentielle sont des moules très généraux qui peuvent s'adapter à une classe entière de phénomènes; elles contiennent des indéterminées dont la valeur doit être fixée pour qu'elles puissent représenter chaque cas particulier. C'est ainsi que toute l'électricité statique rentre dans une seule de ces équations connue sous le nom d'équation de Laplace et de Poisson.

On conçoit que les équations sous forme différentielle aient une importance d'un ordre bien autrement élevé que les précédentes. On pourrait très justement les comparer en disant que les premières sont une pièce de drap

dans laquelle on peut tailler tels vêtements qu'on voudra, et les secondes un seul de ces vêtements.

Nous dirons que deux théories sont équivalentes si elles conduisent aux mêmes équations différentielles. Rigoureusement parlant, elles expliqueront de la même manière les phénomènes, fourniront les mêmes formules sous forme finie pour chaque cas particulier, seront parfaitement indiscernables l'une de l'autre, bien qu'elles aient pu aboutir à ces mêmes équations différentielles en s'appuyant sur des principes métaphysiques absolument différents.

Et, puisque les théories d'où résultent ces mêmes équations différentielles sont équivalentes, il est naturel de conclure que ces équations sont leur partie essentielle et constituent leur seule réalité objective. Conclusion nécessaire : on pourrait se borner à poser ces équations en laissant de côté toutes les interprétations métaphysiques auxquelles elles peuvent servir de support ou dont elles semblent être les conséquences. C'est là une sorte de positivisme très profond et, pour le dire dès l'abord, il me semble que ce soit une loi historique de l'esprit humain de s'en contenter de plus en plus ; et, se servant des représentations métaphysiques pour la recherche, d'essayer, une fois les équations différentielles découvertes, de les dépouiller de toute métaphysique et de les considérer comme l'explication dernière des phénomènes.

cf. Helmholtz in his preface to Hertz's Mech.

Si les interprétations métaphysiques sont cependant encore maintes fois conservées, c'est que leur forme figurative, plus facile à saisir par l'imagination, les rend accessibles à la majorité des intelligences, et c'est pourquoi quelques-unes d'entre elles (par exemple la chaleur considérée comme un mode du mouvement de la matière)

se sont acquis tant d'adhérents. Mais souvent, trop particulières, elles gênent bientôt la science et sont parfois d'insurmontables obstacles à des progrès nouveaux.

Parmi toutes ces formes appelées équations différentielles, sous chacune desquelles se rangent une infinité de phénomènes particuliers, on peut établir une hiérarchie ; elles ne possèdent pas le même degré de généralité. Quelques-unes semblent, d'après la manière même dont elles se présentent, devoir s'appliquer dans tous les cas ; ce sont les formes les plus générales des phénomènes. Les savants s'efforcent d'y ramener les autres comme des cas particuliers.

Le lecteur, qui a suivi l'analyse que nous avons faite de nos sensations fondamentales, ne sera pas étonné d'apprendre que ces formes les plus générales ne sont pas autres que celles qui relient entre eux l'espace, le temps, l'effort, le choc et le travail par le moyen de quelques principes métaphysiques d'une évidence presque logique.

IV

Parvenus à ce point, il nous est possible d'exposer à grands traits quel fut le développement de l'intelligence humaine depuis le commencement du XVII[e] siècle et en même temps de tracer le plan de cet ouvrage.

C'est Galilée et Descartes qui, les premiers, comprirent quelles étaient les notions immédiates qui résultent de nos états de conscience objectivés dans le monde extérieur; ils ont eu l'insigne honneur de découvrir les notions mécaniques; et, quelles qu'aient pu être les erreurs du second, le seul fait d'avoir pour la première fois énoncé

une de ces formes générales dont je parlais, et sous lesquelles on conçoit les phénomènes, lui donne un rang à part parmi les physiciens. Le premier, il a posé une équation de conservation, il a dit que quelque chose avait une somme constante, il a écrit implicitement la première équation sous forme différentielle. Galilée et Descartes ont de plus proclamé le premier principe métaphysique essentiel, incontestable, presque logique par sa certitude, l'inertie de la matière. C'est Newton, cinquante ans après, qui posera le second : l'égalité de l'action et de la réaction. De Descartes à Newton, successivement l'effort, le choc et le travail seront reliés de plus en plus nettement à l'espace ou au temps ; avec Newton et Leibnitz la mécanique sera constituée. Elle entrera, peu après, dans une phase nouvelle. Peu à peu les équations fondamentales, qui jusque-là représentaient des phénomènes relativement peu nombreux et qui tiraient de ce manque d'extension une certitude absolue, perdront ce caractère pour ne devenir que des formes de plus en plus générales, dans lesquelles on cherchera à faire tenir toute la nature. Le physicien pensera selon ces formes. Évidemment moins compréhensives, elles deviendront plus vagues : ce seront de véritables formes algorithmiques. Lagrange les fixera dans des équations célèbres ; Mayer et Joule y feront pénétrer la thermodynamique entière ; Maxwell en revêtira l'électricité. Devant elles les explications imagées disparaîtront comme puériles ; elles sont le dernier aboutissement de la science moderne.

C'est l'histoire de ce merveilleux développement que nous voulons faire, et, s'il en résulte comme conséquence nécessaire l'abandon de toutes les explications figurées, basées sur d'hypothétiques propriétés de la matière, s'il

en résulte aussi un aveu d'impuissance de jamais comprendre le mécanisme intime des phénomènes, par exemple la communication du mouvement entre masses pondérables et impondérables et, par contre-coup, car la question est du même ordre, les relations de l'âme et du corps, au moins aurons-nous fait dans sa plus haute acception le bilan de la science moderne, au moins aurons-nous mesuré dans cet ordre la puissance actuelle de l'esprit humain.

CHAPITRE II

DÉFINITIONS DE LA FORCE ET DU TRAVAIL

I

L'état de conscience « fatigue » fournit à l'homme deux notions mécaniques, celle d'*effort* et celle de *travail.* Il faut d'abord les préciser et les ramener l'une à l'autre.

L'action musculaire d'un homme peut s'évaluer de deux manières également naturelles : l'une consiste à le charger d'un fardeau et à déterminer quel poids il peut supporter, tout en demeurant au repos ; l'autre, à le faire travailler, par exemple élever des fardeaux, et à évaluer l'ouvrage dont il est capable. Il n'existe aucun rapport numérique nécessaire entre ces deux modes d'estimation ; et un hercule de foire, qui porte à bras tendus des poids très lourds, peut n'être pas en état de gravir une montagne élevée. Bien que l'on soit resté fort longtemps — jusqu'à Descartes — sans avoir d'idées nettes sur les relations fondamentales qui existent entre l'effort et le travail, on voit cependant que le second implique un état de mouvement, ce que ne fait pas le premier. L'idée d'espace parcouru est donc étrangère à l'effort ; elle est, au contraire, intimement liée au travail.

Autre remarque d'importance capitale : l'idée de temps n'est associée ni à l'un ni à l'autre ; et, si pour se rendre

un compte exact de la puissance musculaire d'un homme, il est nécessaire de savoir pendant quel temps il peut supporter un fardeau, ou bien en quel temps il peut l'élever à une certaine hauteur, nous comprenons que cette donnée n'entre qu'accessoirement dans l'idée de l'effort ou du travail.

L'effort ou la force est identique à l'action d'un poids. Car, si l'homme supporte un fardeau, c'est qu'il réagit de la même façon que le poids agit: l'on peut admettre que deux grandeurs dont les effets se détruisent sont d'une nature identique.

L'effort, ou la force, est une cause de mouvement, s'il n'est pas équilibré par un effort égal et de sens inverse; mais, dans cet état d'équilibre même, l'effort ne cesse pas de s'exercer. Un corps pesant soutenu par une table ne laisse pas de faire constamment effort pour descendre, et il descendrait effectivement, si la table ne lui opposait un effort égal et de sens contraire. Il est vrai qu'une tendance au mouvement n'est pas une quantité mesurable; on ne peut évaluer une cause par un effet possible, mais non encore réalisé.

L'effort ou la force est une cause de déformation : appliqué à un corps, il en change la figure. Le corps est parfaitement élastique, s'il reprend exactement sa forme primitive, quand l'effort est supprimé; dans le cas contraire, il est imparfaitement élastique. Si la déformation est permanente, le corps est mou. L'expérience montre que presque tous les corps solides sont à peu près parfaitement élastiques pour de petites déformations et à peu près mous pour de grandes déformations. On appelle limite d'élasticité la déformation pour laquelle le corps cesse d'être à peu près parfaitement élastique. Un corps est parfaite-

ment dur, s'il ne se déforme pas sous l'action d'efforts; mais c'est là une pure abstraction. On appelle ressorts les corps élastiques dont les déformations sont considérables: par exemple les lames d'acier, les ressorts à boudin, les fils de caoutchouc, etc.

Pour évaluer les forces d'une façon précise, nous les comparons à des poids. A cette fin, suspendons un corps à une des extrémités d'un ressort à boudin vertical, dont l'autre est maintenue fixe ; nous constatons que la déformation (ici l'allongement) de ce ressort reste la même, quel que soit l'état de division du corps ou les changements de forme de ce corps ; d'où l'on peut conclure que deux volumes séparés de 1 centimètre cube d'un même métal ont le même effet qu'un volume unique de 2 centimètres cubes, et ainsi de suite. Et, comme l'action de la pesanteur, quelle qu'elle soit, nous paraît devoir être la même sur chacun de ces centimètres cubes, nous admettrons que les efforts qui résultent de la pesanteur de volumes différents d'un métal homogène, sont proportionnels à ces volumes, pourvu qu'on reste au même point de la surface terrestre.

Ceci posé, nous prendrons comme unité d'effort ou de force le poids à Paris d'une certaine masse de platine conservée aux Archives et appelée kilogramme. Le gramme est la millième partie de cet effort. Un effort est de 10 grammes par exemple si, appliqué verticalement à un ressort à boudin, il l'allonge autant qu'un poids de 10 grammes. Pour faciliter ces comparaisons, on peut étalonner une fois pour toutes des ressorts, et l'on a ce qu'on appelle des dynamomètres.

A cette fin on suspend au ressort des poids croissants et l'on dresse une table à double entrée contenant les valeurs

de ces poids et les déformations correspondantes. Cet étalonnage est facilité par ce fait que les déformations, pourvu qu'elles soient petites, sont proportionnelles aux efforts.

Les efforts sont souvent exercés par l'intermédiaire de cordes ; il est utile de définir la tension d'une corde. Supposons-la coupée en un point ; attachons les deux bouts à un ressort à boudin étalonné, déterminons la déformation et reportons-nous à la table à double entrée que nous avons construite ; le nombre de kilogrammes que nous lisons en regard de l'allongement observé est, par définition, la tension du câble.

A l'aide de ces données, nous pouvons aisément définir et représenter les éléments constitutifs des forces, puisque, toutes, elles peuvent se ramener à une traction ou à une pression. Supposons que la traction soit exercée avec une corde : le point d'attache s'appelle point d'application de la force, la direction de la force est celle de la corde. Supposons que la pression soit exercée avec un ressort à boudin et de manière qu'il ne se courbe pas : la direction de la pression ou de la force est celle de l'axe du ressort ; son point d'application, le point de contact du ressort.

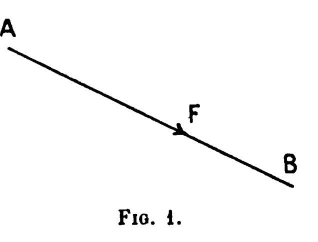


Fig. 1.

Pour figurer la force (*fig.* 1) portons sur la direction AB de la corde ou de l'axe du ressort, et à partir du point A d'application dans le sens de la corde, ou en sens inverse du ressort, une longueur AF représentant conventionnellement l'intensité de la force, — chaque centimètre correspond par exemple à 1 kilogramme.

La droite AF représente complètement les éléments de

la force : sa direction AB, son point d'application A et son intensité AF. Dans ce mode de figuration toutes les forces sont assimilées à des tractions.

II

La seconde manière d'évaluer la force d'un homme est d'examiner l'ouvrage qu'il est en état de faire, par un travail suivi. Sous ce point de vue, pour arriver comme dans le premier cas à une évaluation précise, nous pouvons comparer le résultat de son travail à l'effet de la pesanteur ; car il est naturel d'évaluer ce travail, et par le poids qu'il peut élever, et par la hauteur à laquelle il l'élève. Et, comme il est sensible qu'élever un poids de 100 kilogrammes à 1,000 mètres de hauteur est la même chose, dans cette manière d'évaluer les forces, qu'élever 200 kilogrammes à 500 mètres seulement, il suit que les forces sous ce nouveau point de vue, forces qui prennent alors le nom de travail, doivent être considérées comme proportionnelles aux poids élevés et aux hauteurs auxquelles il faut les amener, ou, ce qui revient au même, le travail est mesuré par le produit du poids par la hauteur. Si donc on appelle kilogrammètre le travail nécessaire pour élever verticalement un kilogramme à un mètre, tous les travaux seront estimables en kilogrammètres.

Carnot, dans son remarquable *Essai sur l'équilibre et le mouvement*, précise ces notions par l'exemple suivant : « C'est de cette manière qu'on entend le mot force, lorsqu'on dit que le cheval équivaut pour la force à sept hommes ; on ne veut pas dire que, si sept hommes tiraient d'un côté et le cheval de l'autre, il y aurait équilibre, mais que, dans

un travail suivi, le cheval à lui seul élèvera par exemple autant d'eau du fond d'un puits à une hauteur donnée que les sept hommes ensemble pendant le même temps. Quand on emploie des ouvriers, l'intérêt est de savoir ce qu'ils peuvent faire de travail dans un genre analogue à celui dont on vient de parler, bien plus que de savoir les fardeaux qu'ils pourraient porter sans bouger de place. Cette manière d'évaluer les forces est donc naturelle et importante. »

Descartes a l'honneur d'avoir énoncé, le premier, des idées parfaitement claires touchant l'essence et la mesure du travail ; et nous insisterons d'autant plus sur ce point que les historiens l'ont passé sous silence. Cet inconcevable oubli peut s'expliquer par le fait que Descartes expose ses idées dans des lettres au Père Mersenne que ni Montucla ni Poggendorff ne se sont donné la peine de lire. Voici ce qu'on trouve dans une lettre au Père Mersenne datée de 1638 : « Vous avez enfin entendu le mot de force au sens où je le prends, quand je dis qu'il faut autant de force pour lever un poids de 100 livres 2 pieds de haut qu'un de 200 livres un seul pied, etc., c'est-à-dire qu'il faut autant d'action ou autant d'effort. Je veux bien croire que je ne m'étais pas ci-devant assez expliqué, puisque vous ne m'aviez pas entendu ; mais j'étais si éloigné de penser à la puissance qu'on nomme la force d'un homme, lorsqu'on dit qu'un tel a plus de force qu'un tel, etc., que je ne pouvais aucunement me douter qu'on pût prendre le mot en ce sens-là. Je ne considère donc pas du tout en cet écrit la puissance qu'on nomme la force d'un homme, mais l'action qu'on nomme la force, par laquelle un poids peut être levé, soit que cette action provienne d'un homme ou d'un ressort, ou d'un autre poids, etc. » Et, dans une autre lettre plus explicite encore, il ajoute : « J'ai parlé de la force qui

sert pour lever un poids, laquelle a deux dimensions, non de celle qui sert en chaque point pour le soutenir, laquelle n'a qu'une dimension. » Malgré l'obscurité apparente qui provient de l'emploi du mot force dans deux acceptions aussi différentes, puisqu'il désigne alternativement l'effort et le travail, on ne peut exprimer avec plus de netteté ce fait que le travail est mesuré par le produit d'une force par un espace parcouru. Nous donnerons d'ailleurs de plus amples explications quand nous parlerons du principe des vitesses virtuelles.

Jusqu'à présent nous n'avons envisagé que le cas où le déplacement du poids se fait suivant la verticale; ou, ce qui revient au même, le cas où le déplacement est parallèle à la direction de la force; ce n'est pas le cas général, qu'il faut aborder maintenant.

Cherchons d'abord quelle quantité d'action un homme peut fournir, lorsqu'il éprouve de son travail toute la fatigue qu'il peut soutenir chaque jour sans dérangement dans son économie animale. Nous extrayons les résultats qui suivent d'un admirable mémoire lu à l'Institut, l'an VI, par l'illustre citoyen Coulomb. Cette quantité d'action peut être dépensée de bien des manières; nous n'insisterons que sur deux d'entre elles : transport d'un fardeau suivant la verticale, transport d'un fardeau suivant l'horizontale.

Lorsque nous montons l'escalier de nos maisons, si nous n'avons pas à nous élever au-delà de 20 ou 30 mètres, nous pouvons monter à raison de 14 mètres par minute. Pour calculer, d'après cette expérience, la quantité d'action fournie par un homme, il faut multiplier le poids de l'homme par la hauteur à laquelle il s'est élevé, et, en supposant le poids moyen de 70 kilogrammes, on trouve 980 kilogrammètres dépensés par minute. Mais un tel

travail ne saurait être soutenu longtemps. Pour atteindre à 300 mètres, il ne faudrait d'après l'estimation précédente que vingt et une minutes; or les ouvriers qui montaient tous les jours à la tour Eiffel mettaient de trente-cinq à quarante minutes. On peut supposer qu'un homme ne supportera le travail d'ascension de 14 mètres par minute tout au plus que quatre heures effectives par jour, ce qui ferait en kilogrammètres 235,000 par jour. Cette estimation est, d'ailleurs, hypothétique et peut être exagérée. Si l'on base le calcul sur la hauteur à laquelle un homme de force moyenne pourrait s'élever tous les jours en montagne, on est conduit à abaisser le résultat ci-dessus et à évaluer à 205,000 kilogrammètres la quantité d'action journalière des hommes qui montent un escalier commode sans être chargés d'aucun fardeau.

Lorsque les hommes voyagent pendant plusieurs jours sans aucune charge, ils peuvent parcourir facilement dans leur journée 50 kilomètres, soit pour la quantité d'action ou produit de leur poids par le chemin parcouru 3,500,000 kilogrammes transportés à un mètre. On ne doit plus parler ici de kilogrammètres, parce que ce terme doit être réservé au déplacement d'un faix suivant la verticale. On constate que cette quantité d'action est très supérieure à celle qui correspond à l'ascension d'un escalier, puisqu'elle est sensiblement dix-sept fois plus grande.

Coulomb fit des expériences avec des portefaix et colporteurs; il trouva moyennement que la quantité d'action qu'ils dépensent peut être évaluée à 1,536,000 kilogrammes transportés à un mètre.

Il résulte des faits précédents une importante conclusion, vaguement entrevue depuis une époque très reculée, autant dire toujours : c'est que les quantités d'actions que four-

nissent des hommes en montant un escalier ne sont pas du même genre que celles des hommes qui marchent librement sur un terrain horizontal. Et la raison de cette différence est que, dans le premier cas, ils sont obligés, à chaque pas, d'élever leur poids à la hauteur d'une marche, tandis que dans le second ils donnent à leur corps un déplacement parallèle au sol. Ce dernier mouvement n'est pas empêché par leur pesanteur; en sorte qu'à chaque pas ils n'ont qu'à produire le transport alternatif des jambes et l'élévation très peu considérable de leur centre de gravité. Celui-ci monte et retombe par un mouvement oscillatoire d'une amplitude de 2 à 3 millimètres, qui dépend principalement de l'art que les hommes acquièrent, lorsqu'ils voyagent souvent, de soutenir leur centre de gravité à peu près parallèlement au terrain sur lequel ils marchent. Aussi ne doit-on pas s'étonner de voir le premier mode de fatigue donner une quantité d'action dix-sept fois moindre que le second. En définitive, on peut énoncer ce qui distingue les deux cas étudiés en disant que, dans l'ascension d'un escalier, le point d'application de la force (ici la pesanteur) est déplacé parallèlement à la force; que, dans la marche horizontale, le déplacement de ce point se fait normalement à la direction de la force.

Si donc nous supposions que l'homme apprît à ne pas déplacer du tout son centre de gravité et parvînt, par une habitude longuement acquise, à réduire au minimum ses mouvements inutiles, on concevrait que la distance horizontale qu'il pourrait parcourir ne serait limitée que par sa vitesse, tandis que la distance verticale ne pourra jamais dépasser une limite peu supérieure à 2,900 ou 3,000 mètres.

C'est par des considérations de cette nature, bien qu'in-

finiment moins nettes, qu'on parvint vers le milieu du XVIe siècle à cette conclusion que le travail est nul quand la force dont on déplace le point d'application est normale à ce déplacement, loi qui peut encore s'énoncer ainsi sous forme schématique : Une sphère parfaitement polie, roulant sur un plan horizontal parfaitement poli, peut être déplacée, sans qu'il en résulte dépense de travail.

Restait à savoir ce que devient le travail lorsque le déplacement n'est pas normal à la direction de la force, ni parallèle, mais oblique. Galilée énonça le rapport exact, mais d'une manière qui a donné lieu à bien des malentendus et dont l'ambiguïté a été vertement relevée par Descartes. C'est à ce dernier que revient l'honneur d'avoir trouvé l'énoncé rigoureux. Le travail résultant d'une force, représentée en grandeur et direction par la droite AF (*fig.* 2) et dont le point d'application A se déplace dans la direction AB d'une longueur AB, est représenté par le produit $AB \times AF_1$; la longueur AF_1 est la projection de AF sur AB, projection obtenue, selon la définition ordinaire, en abaissant du point F une perpendiculaire FF_1 sur la direction AB. Cette loi renferme bien comme cas particuliers : 1° celui où la force est parallèle au déplacement, on a $AF_1 = AF$; 2° celui où la force est normale au déplacement, on a $AF_1 = 0$. Dans le premier cas, le travail a pour mesure le produit de la force par le déplacement, dans le second il est nul.

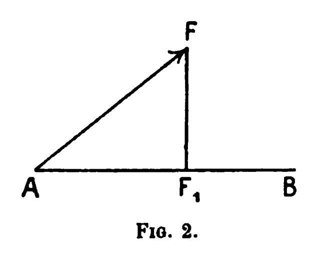


Fig. 2.

Voilà donc un important résultat obtenu, le travail est relié à l'effort par le moyen de l'espace. Désignons géné-

ralement par F la force totale et par F la force utile, c'est-à-dire la projection de la force sur le déplacement ; nous aurons la définition suivante du travail : « Le travail est le produit de la force utile par le déplacement. »

Nous devons faire maintenant une distinction essentielle : le travail peut être agissant ou résistant. Soit un poids P que nous élevons à une hauteur H ; nous devons accomplir un travail PH, autant du moins, ce que nous avons toujours supposé, que la vitesse du mobile reste toujours très petite ou plus généralement la même tout le temps de l'opération ; car on conçoit qu'un changement dans la vitesse puisse nécessiter une dépense de travail. Le travail que nous accomplissons est agissant ; mais le poids du corps, qui à chaque instant fait équilibre à la force de notre bras, accomplit un travail résistant ; et, d'après la définition même du travail, ces deux travaux sont égaux numériquement. On aperçoit facilement la loi générale ; le travail est agissant quand l'angle de la force et du déplacement est aigu : la force facilite alors le déplacement ; il est résistant quand cet angle est obtus : la force gêne le mouvement. On convient de considérer le premier comme positif, le second comme négatif.

III

Jusqu'à présent, la force était supposée constante, et le déplacement rectiligne. Nous allons nous élever, par de pures considérations mathématiques, à la notion de travail quand le déplacement s'effectue sur une courbe, et que la force est variable.

Pour faciliter l'intelligence de ce qui suit, nous userons

d'une représentation graphique. Soient (*fig.* 3) deux droites rectangulaires, OH horizontale, OV verticale. Prenons sur la droite OH une longueur AB d'autant de millimètres qu'il y a de mètres dans le déplacement D_1 et une longueur OM sur la verticale d'autant de millimètres qu'il y a de kilogrammes dans la force *utile* F_1 supposée constante. Le travail F_1H_1, mesuré en kilogrammètres, sera égal à l'aire

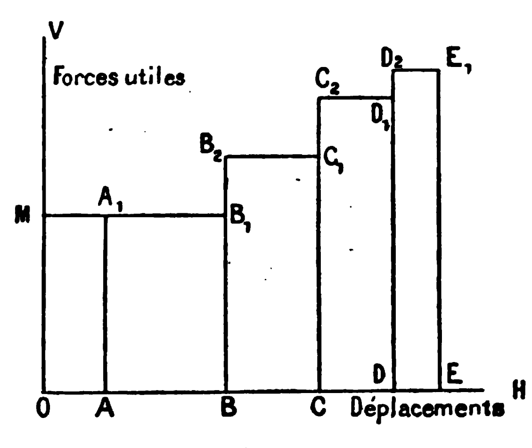


Fig. 3.

du rectangle ABA_1B_1 mesurée en millimètres carrés. Arrivés au point B, supposons que la force *utile* devienne F_2, représentée, suivant nos conventions, par la droite BB_2, et qu'elle reste telle pendant le déplacement $BC = D_2$. Le travail est pour ce déplacement F_2D_2 évalué en kilogrammètres, ou, ce qui revient au même, est égal à l'aire du rectangle BB_2CC_1 évaluée en millimètres carrés, et ainsi de suite. Nous avons supposé que la force utile variait brusquement ; si nous supposions, au contraire, ce qui a lieu généralement, qu'elle varie d'une façon continue, il devient évident, et on le pourrait démontrer rigoureusement, que le travail s'obtient de la manière sui-

vante. Prenons (*fig.* 4) sur la droite horizontale des points ABCD, etc., distants entre eux d'autant de millimètres qu'il y a de mètres dans le déplacement réel, élevons en chacun de ces points des verticales longues d'autant de millimètres que la force *utile* contient de kilogrammes, nous obtenons une série de points $A_1B_1C_1D_1$, etc. Joignons tous ces points par une courbe continue. Le travail effectué dans le déplacement AD est en kilogrammètres égal au nombre de millimètres carrés contenus dans l'aire AA_1D_1D.

Notre représentation n'est pas encore parfaite, car elle

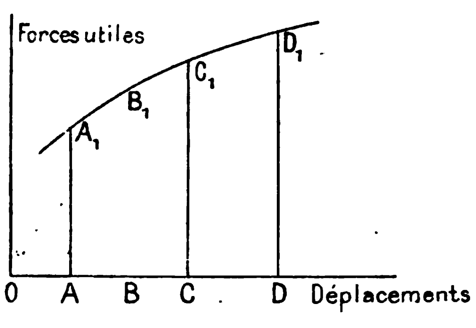


Fig. 4.

ne nous permet pas de distinguer si le travail est agissant ou résistant. Nous conviendrons donc de porter la verticale, qui représente la force utile, au-dessus de l'horizontale, si la force *utile F* est positive, c'est-à-dire si l'angle de la force F avec le déplacement est aigu ; au-dessous de l'horizontale, si la force *utile F* est négative, si l'angle de la force F avec le déplacement est obtus. Le travail est donc positif, si l'aire représentative est au-dessus de l'horizontale, négatif si l'aire est au dessous. Et, comme la somme de quantités, les unes positives, les autres négatives, s'obtient en additionnant séparément les premières et

les secondes, et en retranchant la seconde somme de la première, le travail total ou définitif correspondant à un déplacement donné s'obtient en retranchant des aires situées au-dessus de l'horizontale OH les aires situées au dessous.

Si ces deux aires sont séparément égales, le travail résultant est nul.

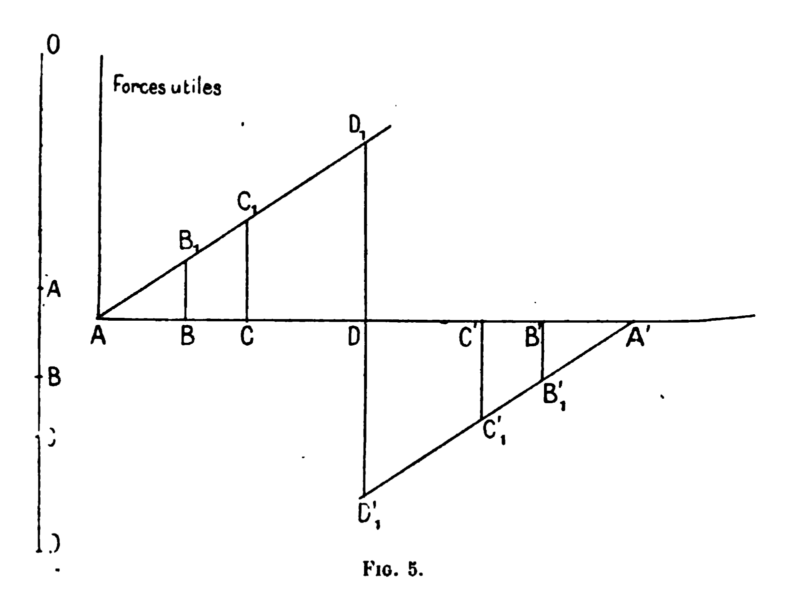


Fig. 5.

Pour prendre un exemple très simple, soit à évaluer le travail que l'on dépense à tendre un fil de caoutchouc. Soit OA (*fig.* 5) la longueur initiale ; il faut déterminer d'abord quel effort on doit exercer sur le fil pour lui donner les longueurs successives OB, OC, OD. Il suffit d'y suspendre des poids. L'expérience montre que le nombre de grammes nécessaires à un allongement donné est proportionnel à cet allongement; c'est-à-dire que, s'il faut 1 kilogramme pour l'allonger de $0^m,5$, il en faut 2 kilogrammes pour l'allonger 1 de mètre, etc. Portons sur l'horizontale

des longueurs AB, AC, etc., représentant les allongements; élevons aux points BCD des perpendiculaires représentant les forces *utiles F*, qui se confondent ici avec les forces totales F, puisque la force est dirigée suivant le déplacement; les points $B_1C_1D_1$ sont sur une droite puisque les forces BB_1, CC_1 etc., doivent être proportionnelles aux allongements AB, AC, etc. L'aire du triangle ADD_1 représente le travail nécessaire à l'allongement total, si, bien entendu, le mouvement est toujours très lent.

Supposons maintenant qu'après avoir donné au fil l'allongement AD nous le laissions revenir à sa longueur primitive; d'agissant, le travail de la main devient résistant; les forces doivent être portées au-dessous de l'horizontale; le travail correspondant à la contraction du fil est représenté par l'aire négative DD'_1A' égale en valeur absolue à l'aire positive AD_1D.

Le travail total est nul; nous avons retrouvé dans la seconde partie de l'opération le travail dépensé dans la première.

IV

Nous voici donc parvenus à l'idée très générale de travail accompli dans un déplacement donné, la trajectoire du point d'application de la force étant quelconque, ainsi que la direction de la force. On peut aller d'un lieu à un autre lieu par divers chemins et l'on conçoit que les travaux calculés pour ces différents chemins puissent être très différents. C'est, en général, ce qui se présente lorsque des forces de frottement entrent en jeu. Il est clair que, pour transporter un fardeau au sommet d'une montagne,

il y a économie à choisir le chemin le plus dur et le plus régulier, alors même qu'il serait le plus long. Toutefois, comme nous pouvons, par des procédés divers, rendre le frottement presque nul, en substituant le roulement au frottement proprement dit, en aplanissant les trajectoires, etc., nous en pouvons faire abstraction et chercher s'il n'y aurait pas des forces telles et tellement disposées que le travail dépensé fût le même pour amener un corps d'un lieu à un autre lieu, quel que soit le chemin choisi.

Il n'est guère difficile de trouver un exemple où soit réalisée cette hypothèse. Les forces de la pesanteur nous le fournissent. Quel que soit le chemin qu'on emploie pour porter un corps d'un point à un autre, abstraction faite des frottements, le travail est le même. La démonstration est très aisée, si l'on considère : en premier lieu, qu'une courbe peut être remplacée par un polygone d'un grand nombre de côtés, ou, ce qui revient au même, une trajectoire quelconque par une série de plans inclinés ; en second lieu, que si on utilise plusieurs plans inclinés pour passer d'un plan horizontal sur un autre plan horizontal, le travail reste le même ; car, si la force utile diminue, le chemin augmente, quand l'inclinaison du plan devient de plus en plus faible, et cela exactement dans la même proportion ; le produit ne varie donc pas ; en troisième lieu, que le déplacement sur un plan horizontal parfaitement poli n'entraîne aucune dépense de travail. Nous parvenons ainsi à prouver non seulement que le travail est indépendant du chemin parcouru quand on transporte un corps pesant d'un point à un autre, mais encore que, si le corps est parti d'un plan horizontal d'une certaine cote pour s'arrêter sur un autre plan d'une autre cote, le travail est indé-

pendant des positions des points de départ et d'arrivée et ne dépend que de la différence des cotes des deux plans horizontaux.

Dans le cas très important, que nous venons de voir réalisé pour la pesanteur, où le travail pour passer d'un point à un autre, et plus généralement d'une surface à une autre surface, est indépendant du chemin parcouru, les forces sont dites avoir un potentiel. Telles sont les forces électriques, magnétiques, de la gravitation, c'est-à-dire les plus importantes parmi celles que nous connaissons. Cherchons à préciser l'idée que recouvre cette dénomination.

Pris au sens vulgaire, le mot potentiel ou virtuel représente ce qui existe, mais d'une manière non complètement déterminée, ce qui tend à une détermination plus précise et qui l'atteindra si rien ne l'empêche. L'être en puissance tend à passer à l'état actuel. Laissant pour l'instant ce sens métaphysique de côté, nous sommes libres d'appeler énergie potentielle d'un corps, dans une position donnée A, le travail total que peuvent accomplir les forces qui agissent sur ce corps, lorsqu'il passe de sa position donnée A à une autre B, à laquelle on supposera toujours le corps ramené, qui sera pour ainsi dire le terminus de tous les déplacements.

Supposons, par exemple, un corps pesant de poids P qui se trouve d'abord à diverses hauteurs H_1, H_2, etc., et qu'on ramène toujours à la surface de la terre ; le travail total accompli pendant ce déplacement par les forces de la pesanteur est PH_1, PH_2, etc. Ces produits représentent l'énergie potentielle du corps par rapport à la surface de la terre. Ce n'en est pas l'énergie potentielle absolue; car, si l'on creuse un puits de hauteur h, les forces de la

pesanteur auront accompli des travaux $P(H_1 + h)$, $P(H_2 + h)$, etc..., quand le corps, partant des hauteurs H_1, H_2, etc., au-dessus de la surface terrestre, sera parvenu au fond du puits. Pour avoir l'énergie potentielle absolue, il faudrait ajouter aux travaux PH_1, PH_2, etc., le travail de la gravité, en supposant le puits prolongé jusqu'au centre de la terre et le corps continuant à descendre jusqu'en ce point. Cette dernière position du corps est telle qu'on ne puisse en trouver une autre pour laquelle le travail accompli soit plus grand.

Il est bien clair que l'on ne saurait parler d'énergie potentielle que dans le cas où les travaux accomplis par les forces considérées, quand le corps passe d'une position à une autre position, sont indépendants de la trajectoire employée; car c'est le seul cas où chaque position peut être caractérisée par une valeur déterminée et unique de l'énergie potentielle. Aussi dit-on alors, par abréviation, que les forces possèdent un potentiel.

Ceci posé, soit E_{A_1} l'énergie potentielle correspondant à la position A_1, E_{A_2} celle qui correspond à la position A_2, la position B étant prise comme terminus des déplacements; en d'autres termes, ces énergies sont les travaux que peuvent accomplir les forces agissant sur le corps, quand on passe des positions A_1, A_2 à la position B. Comme la trajectoire est indifférente, je suppose que le corps aille de A_1 en B en passant par A_2. Désignant par T_{AB} le travail des forces quand on va de A à B, nous avons $E_{A_1} = T_{A_1B}$, $E_{A_2} = T_{A_2B}$.

Mais $E_{A_1} = T_{A_1A_2} + E_{A_2}$, puisque par hypothèse le corps partant de A_1 parvient en B en passant par A_2. D'où enfin $T_{A_1A_2} = E_{A_1} - E_{A_2}$. En langage vulgaire, pour trouver le travail correspondant au passage du corps de A_1 en A_2, il

suffit de prendre la différence des énergies correspondant à ces deux positions.

Appliquons aux forces de la pesanteur; supposons que le corps passe de la hauteur H_1 à la hauteur H_2, les énergies correspondantes sont PH_1 et PH_2; le travail des forces pendant le déplacement est $P(H_1 - H_2)$.

Il est peu de théorèmes aussi importants dans la mécanique, et cela tient à ce que toutes les forces de la nature semblent admettre un potentiel, au moins lorsqu'on ne s'arrête point aux apparences. Nous verrons plus loin quelle est la forme de l'énergie une fois qu'elle a quitté l'état potentiel et qu'elle est parvenue à l'état actuel.

Jusqu'à présent nous n'avons fait qu'énoncer sous une certaine forme le résultat de nos définitions du travail, définitions dont nous n'avons d'ailleurs apporté, dans ce qui précède, aucune démonstration expérimentale. Jusqu'à présent donc, l'expression énergie potentielle est une simple définition de mot. Mais nous en dépassons singulièrement le sens, en restituant au mot potentiel son acception scolastique; ce qui implique que nous admettions, dans un corps ou autour d'un corps qui sera soumis à des forces, quelque chose d'existant réellement, bien que sous forme virtuelle, et qui représente le travail qu'accompliront les forces. Sous quelle forme existe ce quelque chose, est-ce dans le corps ou dans le milieu ambiant, nous ne le déciderons pas pour le moment. Sans insister d'ailleurs sur les idées que nous indiquons seulement, nous ferons remarquer que ces mots, potentiel et actuel, sont purement relatifs, qu'une même grandeur peut être successivement potentielle ou actuelle suivant la grandeur de comparaison.

Ainsi que nous le disions plus haut, ce chapitre ne con-

tient que des définitions appuyées sur des considérations assez vagues. Ces définitions, prises telles quelles, sont inattaquables, mais inutiles, car rien ne prouve qu'elles représentent quelque chose de réel. Dans ce qui suit, nous allons mettre en œuvre la notion de travail telle que nous l'avons précisée, et de l'importance des principes où elle intervient nous pourrons conclure le bien-fondé de nos définitions et, jusqu'à un certain point et avec de prudentes réserves, la justesse de l'expression énergie potentielle, alors même qu'on ne la dépouillerait pas de sa compréhension métaphysique.

CHAPITRE III

PRINCIPE DES VITESSES VIRTUELLES

I

Le géomètre considère souvent des points sans étendue : le physicien ne peut s'arrêter à de pareilles abstractions ; il envisage donc des corps, c'est-à-dire des collections de points liés les uns aux autres, qu'il appelle systèmes. Les liaisons, en mécanique, sont toutes les conditions géométriques auxquelles satisfont les diverses parties d'une machine les unes par rapport aux autres. Ainsi une sphère suspendue par un fil à un point fixe et dont le centre est conséquemment assujetti à rester à une distance de ce point moindre qu'une longueur donnée, et au plus égale, est soumise à une liaison. Il en est de même des diverses particules qui composent un corps rigide et qui, par suite, sont supposées maintenues entre elles à des distances invariables.

Le propre des liaisons est de gêner les mouvements et généralement de restreindre le nombre des trajectoires permises aux parties constituantes du système. Tandis que le centre d'une balle libre dans l'espace peut occuper tous les points de cet espace, le centre d'une balle suspendue à un fil non rigide ne peut décrire que des trajectoires situées à l'intérieur d'une sphère dont le rayon égale la longueur du fil ; le centre d'une balle suspendue à un fil

CHAPITRE XI

DES FORCES VIVES ET DE LA FORCE DES CORPS

I

Nous avons ramené, dans le chapitre VI, la mécanique entière à l'application du seul principe des vitesses virtuelles, en considérant comme appliquées au système non seulement les forces mesurables par leurs effets statiques, mais encore les forces d'inertie ; ces forces, qui représentent la résistance des corps au mouvement, ont pour expression mathématique un vecteur égal en longueur au produit de la masse par l'accélération, dont la direction est celle de l'accélération, mais dont le sens est contraire. Le principe fondamental, dit de d'Alembert sous la forme donnée par Lagrange, s'énonce ainsi : Les travaux des forces dont la mesure est statique et des forces d'inertie sont égaux en valeur absolue, mais l'un résiste quand l'autre agit.

On peut donner aux travaux des forces d'inertie une autre expression que nous allons calculer dans le cas particulier des forces de la pesanteur. Si un corps commence sa chute au temps o avec une vitesse initiale v_0, et si g est l'accélération, au bout d'un temps t de chute, la vitesse est $v = v_0 + gt$, et l'espace parcouru est $e = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2$. Calculons l'expression suivante $\frac{mv^2 - mv_0^2}{2}$.

Nous trouvons aisément qu'elle est égale à $mv_0gt + \frac{1}{2}mg^2t^2$. Remplaçons, dans l'expression du travail de la pesanteur mge, e par sa valeur, il vient $mge = mv_0gt + \frac{1}{2}mg^2t^2$. On a donc $mge = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$.

Le produit $\frac{mv_1^2}{2}$ de la masse par la moitié du carré de la vitesse s'appelle force vive. Nous pouvons donc énoncer le résultat précédent en disant que le travail de la pesanteur est égal à la variation de la force vive. Ce résultat, que nous venons de démontrer dans le cas de la pesanteur, est absolument général. Soit T_{AB} le travail des forces mesurées par leurs effets statiques quand on passe de l'état A à l'état B du système; soit U_A la somme des forces vives de tous les points du système dans le premier état, U_B la somme des forces vives de tous les points dans le second ; on démontre que l'on a généralement :

$$T_{AB} = U_B - U_A.$$

Nous avons vu qu'un ensemble de forces est dit avoir un potentiel par rapport à un système de corps quand leur travail reste le même dans le passage du système d'une première position A à une seconde position B, quelles que soient les trajectoires parcourues par les différents points du système. Mais ce n'est là qu'une vue assez superficielle, et il est temps de généraliser nos idées. On conçoit que, si la position dans l'espace des masses qui composent un système le définit complètement dans certains cas, souvent la position des masses est presque indifférente, et l'état de ces masses importe bien plus. Quand un

gramme d'hydrogène s'unit avec huit d'oxygène, il est singulièrement plus utile de considérer l'état initial et l'état final des corps en présence que leur situation par rapport à un plan horizontal. — Laissant donc nos premières définitions, très claires, mais pas assez profondes, nous dirons qu'un ensemble de forces a un potentiel, par rapport à un système quand leur travail reste le même dans le passage du système d'un premier état A à un second état B, quels que soient les états intermédiaires traversés par les différentes parties du système.

Or, indépendamment de sa position dans l'espace, l'état d'une *petite masse* peut être caractérisé par exemple par sa vitesse; c'est même là un état d'une définition très simple, puisque la nature chimique de la petite masse n'est pas modifiée.

Mais la définition de l'état d'un système est un peu plus complexe. Tandis que, par exemple, on peut définir l'état d'une seule masse par sa vitesse, et qu'il n'y a ainsi, à proprement parler, qu'une série infinie d'états possibles; s'il s'agit de deux corps, il y aura une infinité de séries possibles, puisqu'il suffit de donner à une des masses une vitesse arbitraire, et à l'autre la série infinie des vitesses pour avoir une première infinité d'états; à chaque vitesse arbitraire du premier corps correspond ainsi une infinité d'états du système et, par conséquent, il en existe en tout une infinité d'infinités. Et ainsi de suite, à mesure qu'augmente le nombre des masses du système. Mais on conçoit que, sous un point de vue particulier, plusieurs de ces combinaisons soient équivalentes. De même que l'on peut payer une même somme d'un grand nombre de manières en employant des monnaies de valeurs différentes, sans pour cela que le total se trouve modifié, et

que la valeur marchande de cette réunion de pièces ne soit ni augmentée ni diminuée : ainsi, pour les vitesses, nous pouvons caractériser un des états du système, non plus par les valeurs individuelles des vitesses des différentes masses, mais par la somme des forces vives de chacune des masses. Soit m_1, m_2, m_3, etc., ces masses v_1, v_2, v_3, etc., les vitesses correspondantes ; nous définirons l'état du système par l'expression :

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} + \frac{m_3v_3^2}{2} + \text{etc.}$$

que nous appellerons, pour abréger, énergie actuelle. Cela veut dire qu'au point de vue particulier où nous nous plaçons il ne nous importe pas de savoir quelles sont les vitesses individuelles des masses prises isolément, mais simplement la valeur totale de la somme ci-dessus, de cette énergie actuelle.

Et, pour en revenir enfin à notre point de départ, nous disons, par rapport à cette énergie, à cet état choisi, qu'un système de forces a un potentiel, si le travail de ces forces reste le même quand on passe d'une certaine valeur U_A de l'énergie actuelle, c'est-à-dire de l'état A, à une autre valeur U_B de cette énergie, c'est-à-dire à l'état B, quels que soient les états intermédiaires, c'est-à-dire les valeurs U prises successivement par l'énergie.

Ceci posé, nous pouvons enfin énoncer le théorème remarquable suivant : les forces d'inertie admettent un potentiel qui est l'énergie actuelle. En effet, le principe fondamental de la dynamique a pour énoncé : $t_{AB} + T_{AB} = 0$, en appelant t_{AB} le travail des forces d'inertie. Or : $T_{AB} = U_B - U_A$. Donc : $t_{AB} = U_A - U_B$, ce qui démontre le théorème.

Quand des forces admettent un potentiel, le travail positif exécuté par les forces est numériquement égal au décroissement de ce potentiel. Pour employer une expression plus concrète, si le travail que peuvent fournir les forces est déjà actuellement représenté sous une certaine forme que nous avons appelée énergie potentielle, le travail effectué par les forces quand on passe de la position A à la position B est égal à la diminution de cette énergie et a pour expression $T_{AB} = E_A - E_B$. L'énergie actuelle n'est donc pas autre chose que l'énergie potentielle des forces d'inertie. Quand la force vive diminue, le travail des forces d'inertie est positif et représenté numériquement par cette diminution. Voici quelques conséquences de ce nouvel énoncé.

Tout d'abord, si les forces qui agissent sur le système sont nulles, ou ont un travail nul, $T_{AB} = o$. Donc $U_B = U_A$, et les valeurs de l'énergie actuelle sont les mêmes pour le premier et le second état. Or, il existe une circonstance très importante où nous sommes sûrs *a priori* que le travail des forces est nul, au moins pour un petit déplacement du système à partir d'une position donnée; c'est celui où les forces se font équilibre, c'est-à-dire où le système demeurerait au repos, si on le supposait un instant au repos. D'où le théorème suivant: Quand un système passe par une de ses positions ou formes d'équilibre, l'énergie actuelle ne varie pas : ce qui revient au même, elle passe par un maximum ou un minimum. Cherchons à préciser; nous avons vu que, pour l'équilibre stable, le travail des forces pour un petit déplacement fini, à partir de la position d'équilibre, est négatif. Appelons A la position d'équilibre, B cette position voisine : si l'équilibre est stable, on a $T_{AB} < o$, puisque le travail des forces est résis-

tant, conséquemment $U_B < U_A$: donc l'énergie actuelle passe par un maximum.

Exemple: Un pendule est à l'état d'équilibre stable, si la corde est verticale et le poids en bas; donc, si le pendule fait des oscillations, le maximum de vitesse correspond au passage par la verticale. Ce même pendule, supposée la tige rigide, a une position d'équilibre instable, lorsque le poids est sur la verticale du point de suspension mais au dessus ; si donc on lance le pendule avec une vitesse suffisante pour qu'il décrive, non plus des va-et-vient, mais des cercles complets, le minimum de la vitesse aura lieu lors du passage supérieur à la verticale.

Ce principe a été énoncé par le marquis de Courtivron, dans l'*Histoire de l'Académie* pour 1749 sous la forme suivante : « Principe nouveau. De toutes les situations que prend successivement un système de corps animés par des forces quelconques et liés les uns aux autres par des fils, par des leviers ou tel autre moyen qu'on veuille supposer, celle où le système a la plus grande somme de produits des masses par le carré des vitesses, c'est-à-dire la plus grande force vive, est la même situation que celle où il le faudrait placer en premier lieu, pour qu'il restât en équilibre. »

Une autre conséquence importante s'applique au cas où les forces mesurées par leurs effets statiques admettent un potentiel; si l'on veut, s'il leur correspond une énergie potentielle E. Soient E_A et E_B les valeurs de cette énergie dans les situations A et B, on peut poser $T_{AB} = E_A - E_B$. Or, on a aussi $T_{AB} = U_B - U_A$; d'où enfin :

$$E_A - E_B = U_B - U_A, \qquad E_A + U_A = E_B + U_B$$

résultat qui s'énonce de la manière suivante :

La somme de l'énergie potentielle et de l'énergie actuelle est une quantité constante ; si la seconde croît, la première décroît d'autant ; inversement, à une diminution de la première correspond un accroissement de la seconde. Enfin, si on englobe les deux sortes d'énergie sous le même vocable d'énergie, on peut dire que l'énergie d'un système se conserve.

Mais il importe de le redire à satiété ; ce ne sont encore là que des manières de parler. Nous n'avançons, en employant ces formes, rien que de connu ; nous ne faisons qu'énoncer d'une façon rapide et commode le résultat de nos hypothèses fondamentales, à savoir : 1° qu'il y a équilibre dans une situation, lorsque, pour un petit mouvement à partir de cette situation, le travail des forces est nul ; 2° que l'on peut appliquer le même principe aux forces d'inertie. Tout le reste n'est qu'une déduction nécessaire et mathématique, indiscutable une fois les principes admis, et qui ne renferme absolument rien de nouveau. Nous ne sommes pas plus libres de nier ces conséquences que, le postulatum d'Euclide admis, de nier que les trois angles d'un triangle valent deux droits.

II

La notion de force vive est si fondamentale que nous devons insister sur l'historique de sa découverte, afin de payer à Leibnitz, son auteur, un juste tribut d'admiration. Nous allons donc analyser un petit opuscule, *l'Essai de dynamique*, qui résume ses idées. On y rencontre pour

la première fois des démonstrations basées sur l'impossibilité du mouvement perpétuel, principe qui depuis a tant servi dans toutes les branches de la physique.

L'opuscule débute par quelques définitions.

Définition I. — De la force égale, moindre ou plus grande.

Lorsqu'il y a deux états tellement faits que, si l'un pouvait être substitué à l'autre sans aucune action du dehors, il s'ensuivrait un mouvement perpétuel, on dirait que la force a été augmentée, ou que la force de l'état substitué est plus grande. (Le mot force est pris ici dans le sens d'énergie, ce qui importe peu pourvu qu'on soit prévenu.)

Définition II. — La quantité de mouvement est le produit de la masse par la vitesse : les masses sont mesurées par les poids.

Définition III. — Le mouvement perpétuel est impossible. On dit qu'il y a mouvement perpétuel quand le système, partant d'un certain état, revient à ce même état ; et que, sans qu'il y ait eu d'actions extérieures, non seulement le premier état est restitué, mais le système peut produire encore quelque effet. (Cette définition comporte comme cas particuliers la définition vulgaire ; car dans tout mouvement il faut vaincre des frottements ; un système ne peut donc, sans forces extérieures, continuer indéfiniment à se mouvoir sans créer pour ainsi dire de quoi compenser le travail des frottements.)

Axiome I. — La même quantité de force se conserve; on ne peut substituer l'un à l'autre que des états égaux,

suivant la définition I ; ou, ce qui revient au même, l'effet entier est égal à sa cause.

Axiome II. — Il faut autant de force pour élever une livre à la hauteur de 4 pieds qu'il en faut pour élever quatre livres à la hauteur d'un pied. (Cet axiome montre que le mot force est bien pour Leibnitz l'équivalent du mot travail.)

Postulatum I. — On demande que toute la force d'un corps puisse être transférée sur un autre corps donné ou, du moins, si on suppose cette translation, qu'il n'en arriverait aucune absurdité. On peut imaginer certaines machines pour l'exécution de ces translations de force ; mais, quand bien même on n'en donnerait pas la construction, c'est assez qu'il n'y ait pas impossibilité.

Postulatum II. — On demande que les empêchements extérieurs soient exclus ou négligés comme s'il n'y en avait aucun.

Toutes ces définitions posées, ces axiomes et ces postulats admis, Leibnitz démontre que la force des corps, en langage moderne leur énergie, est mesurée par la force vive et non par quelque autre fonction de la vitesse, telle que la quantité de mouvement. Voici la suite des propositions.

Proposition I. — Les vitesses que les corps pesants acquièrent en descendant sont comme les racines carrées des hauteurs d'où ils descendent, et *vice versa ;* les corps, en vertu des vitesses qu'ils ont, peuvent remonter aux hauteurs d'où ils devraient descendre pour acquérir ces

vitesses, et cela que le corps soit gros ou petit, la chute oblique ou verticale, pourvu qu'on observe la deuxième demande. (Nous connaissons déjà cette proposition; elle avait été démontrée avant Leibnitz, par Galilée et Huyghens.)

Proposition II (qui peut se déduire de l'axiome II et du postulatum I). — Un corps A pesant une livre, en descendant de la hauteur de 16 pieds, peut élever un corps B pesant 4 livres à une hauteur qui soit tant soit peu moindre de 4 pieds. Cela se prouve par la statique commune. Par exemple, à l'aide d'un fléau de balance dont les bras soient comme de 1 à 4. D'ailleurs, ce n'est pas autre chose que l'énoncé du principe des vitesses virtuelles. Cette proposition est, en plus, générale pour le deuxième axiome.

Proposition III. — Supposez que la quantité de mouvement se conserve toujours, on peut faire en sorte qu'à la place d'un corps de 4 livres avec 1 degré de vitesse, on obtienne un corps d'une livre avec 4 degrés de vitesse. Ce qui résulte de la définition II et du postulat I. Car (postulat I) on peut transporter toute la force de A sur B; donc, si A seul était en mouvement, B ensuite sera seul en mouvement. Comme rien d'accidentel n'a absorbé quelque chose de force (demande II) il faut que B ait la même quantité de mouvement que A.

Proposition IV. — Supposez qu'à la place de 4 livres avec 1 degré de vitesse on puisse acquérir 1 livre avec 4 degrés de vitesse; je dis qu'on pourra obtenir le mouvement perpétuel.

Faisons qu'un globe A de 4 livres descende de la hauteur 1 et acquière 1 degré de vitesse. Soit maintenant obtenu qu'à sa place un globe B d'une livre ait 4 degrés de vitesse (hyp.). Le globe B montera à 16 pieds (prop. I); puis, engagé dans une balance et redescendant à l'horizon, il pourra élever A d'une hauteur de 4 pieds (prop. II). Au commencement, A était élevé d'un pied au-dessus de l'horizon, B était sur l'horizon. Maintenant B est sur l'horizon, A est à une hauteur 4. C'est le mouvement perpétuel.

Proposition V. — Supposé que la quantité de mouvement se conserve toujours, on peut obtenir le mouvement perpétuel mécanique. Ce qui résulte immédiatement des propositions III et IV.

On comprend, d'après ces théorèmes, que Leibnitz ait voulu refuser à la quantité de mouvement le nom de force des corps; car, s'il existe quelque chose de mesurable qui caractérise la puissance d'un corps, le propre de ce quelque chose est de pouvoir s'échanger et se conserver; on ne peut admettre ni cet échange, ni cette conservation pour les quantités de mouvement.

Ce travail éliminatoire effectué, on peut alors se demander s'il n'existerait pas quelque autre fonction de la vitesse, qui satisfasse à ces conditions.

Proposition VI. — Un corps de 4 livres de poids et de 1 degré de vitesse a seulement le 1/4 de la quantité de force d'un corps d'une livre de poids et de 4 degrés de vitesse.

Si A (4 livres) monte à 1 pied, B (1 livre) montera à 16 pieds (prop. I).

B monte une livre à 16 pieds: donc 16 livres à un pied (axiome II).

A monte une livre à un pied (hypothèse).

Or, la force d'élever 16 livres à un pied est quadruple de la force d'élever 4 livres à un pied (sens commun). Donc C. Q. F. D.

Proposition VII. — Un corps de 4 livres de poids et de 1 degré de vitesse a la même force qu'un corps d'une livre de poids et de 2 degrés de vitesse. Même démonstration.

Ces propositions jointes montrent que la force des corps est mesurée par le produit de la masse par le carré de la vitesse, en d'autres termes par la force vive.

Voilà toute la dynamique de Leibnitz ; on ne peut dire en moins de mots tant de choses profondes et vraies. S'il prend pour mesure de la force des corps la force vive, c'est qu'elle est immuable, peut s'échanger, correspond absolument à l'idée que nous nous faisons de l'énergie. Il en montre la source dans le travail, et pose comme nécessaire la transformation réciproque du travail et du mouvement. Il montre, enfin, que la quantité de mouvement ne satisfait pas à ces conditions et donne le dernier coup au système de Descartes.

III

C'est en 1686, mais sous une forme moins systématique, que Leibnitz publia ses idées pour la première fois. Dans cet écrit, il reproche aux Cartésiens d'admirer leur maître sans aucun discernement, de remplacer la réflexion par

la tradition, et leur démontre la fausseté de la règle de Descartes. Ce fut le début d'une querelle qui servit assurément à éclaircir les idées que l'on avait alors en dynamique, mais qui devint bientôt une pure dispute de mots.

Une réplique ne se fit pas attendre : elle fut envoyée par un abbé de Conti à la République des Lettres de septembre 1686. Toute l'argumentation se réduit à ceci : « Dans l'exemple de M. de Leibnitz, le corps d'une livre monterait à la hauteur de 4 aunes dans un temps comme 2, et le corps de 4 livres monterait d'une aune dans un temps comme 1. Puisque les temps sont inégaux, il n'est pas étrange qu'on trouve inégales les quantités de mouvement : les forces des deux corps ne sont pas égales. » L'abbé assaisonnait sa critique d'injures dans le goût du temps.

La réponse parut au mois de février 1687; elle est digne du grand philosophe.

« Les Cartésiens, dit-il, prétendent qu'il se garde la même force en somme, qu'ils estiment toujours par la quantité de mouvement. Par exemple, s'il y a un corps de 4 livres d'une vitesse de 1 degré et qu'on suppose que toute sa force doit maintenant être transférée sur un corps d'une livre, n'est-il pas vrai que les Cartésiens prononceront que dans cette supposition il faudra que ce corps reçoive une vitesse de 4 degrés, afin que la même quantité de mouvement soit gardée? Mais selon moi ce corps ne doit recevoir qu'une vitesse 2, de sorte que l'opposition est assez manifeste.

Et, en estimant les forces que les corps ont acquises, ces Messieurs ne se mettent point en peine si elles ont été acquises en un temps long ou court, inégal ou égal. En effet, le temps ne sert de rien à cette estime. Voyant un

corps d'une grandeur donnée aller d'une vitesse donnée, ne pourra-t-on pas estimer sa force sans savoir en quel temps et par quels détours ou délais il a acquis la vitesse qu'il a? Il me semble qu'on peut juger ici sur l'état présent sans savoir le passé. Quand il y a deux corps parfaitement égaux et semblables et qui ont une même vitesse, mais acquise dans l'un par un choc subit, dans l'autre par quelque descente de durée notable, dira-t-on que leurs forces sont différentes? Ce serait comme si on disait qu'un homme est plus riche à qui l'argent a coûté plus de temps à gagner. Mais, qui plus est, il n'est pas nécessaire que les deux corps que j'avais proposés aient parcouru leurs différentes hauteurs en temps inégaux; car, selon qu'on change la ligne de descente, en la rendant plus ou moins inclinée, on peut faire d'une infinité de façons que ces deux corps descendent de leurs différentes hauteurs en temps égaux. »

La question semblait donc complètement élucidée ; Leibnitz avait clairement expliqué sa pensée, ce qu'il entendait par force des corps, en quoi sa définition était plus avantageuse que l'ancienne. Malgré cela, pendant quarante ans, on va ressasser contre lui les mêmes ridicules arguments, et chacun tiendra à honneur de dire son petit mot sur la force des corps. M. de Voltaire lui-même, en 1744, envoie à l'*Académie* un mémoire que M. de Fontenelle n'a pas honte de louer.

D'ailleurs, Fontenelle n'avait pas attendu jusque-là pour donner son avis. Dans l'*Histoire de l'Académie* de 1721, voici en quels termes il traite l'opinion de Leibnitz : « Les plus grands génies ne sont pas incapables de grandes erreurs. Outre le fonds commun à toute la nature humaine, ils peuvent avoir une confiance en eux-mêmes qui, quoique

légitime, en général, et justifiée par un grand nombre de succès, ne manquera guère d'être un principe trompeur dans quelques applications particulières. On va le voir par l'exemple de feu M. Leibnitz qui suffira seul pour consoler les grands hommes tombés dans ce cas. Tous les mathématiciens modernes conviennent que la force des corps est le produit de leur masse par leur vitesse, et l'on ne voit pas que la mesure de la force motrice dût être le carré de la vitesse. Car, d'où viendrait ce carré? Quels seraient les deux effets de la vitesse?

« Cependant, comme nous l'avons dit en 1716, M. Leibnitz prenait pour mesure de la force des corps en mouvement le produit de leur masse, non par la vitesse, mais par le carré de leur vitesse. Sa principale raison et celle qui paraît l'avoir conduit à cette pensée est que, selon le système de Galilée très bien démontré et reçu de tout le monde, un corps poussé de bas en haut avec un degré de vitesse et qui monte par exemple à une toise, monte à 4, s'il est poussé avec 2 degrés, à 9 s'il l'est avec 3. Or, les forces sont comme les espaces qu'elles font parcourir et ces espaces sont comme les carrés des vitesses, donc les forces sont comme les carrés. » Or, ainsi que nous l'avons vu, jamais Leibnitz n'a dit de pareilles absurdités. Il prévient qu'il appelle force des corps quelque chose qui peut se transmettre et qui a pour équivalent un travail accompli ou pouvant être accompli. Mais ce travail le peut être d'une infinité de manières, et ce n'est que dans le cas, tout à fait particulier, d'une force constante et d'un déplacement parallèle à la force que les forces au sens de Leibnitz se trouvent comme les espaces qu'elles font parcourir. D'ailleurs, puisque les corps en mouvement, si rien ne les en empêche, conservent indéfiniment leur vitesse, si

on prend pour force des corps le chemin qu'ils peuvent parcourir, la force des corps est toujours infinie. Assurément la force d'un corps, au sens de Leibnitz, dépend bien de l'espace que le corps peut parcourir, à la condition que, pendant ce parcours, il y ait un travail accompli contre certaines forces.

Les saines idées dynamiques s'étaient tellement obscurcies sous l'influence du principe des vitesses virtuelles mal interprété que de Mairan, dans un fort long mémoire, publié en 1718, dit ce qui suit : « L'effet le plus universellement connu de la force en tant qu'appliquée aux corps, ou en tant qu'on imagine qu'elle y réside après y avoir été appliquée, c'est le mouvement. Force et mouvement ne sont ici que des grandeurs susceptibles de plus ou de moins et par là toujours relatives à quelque terme qui leur doit servir de commune mesure. » Autant d'erreurs que de mots. La force au sens moderne, en tant qu'elle est appliquée à un corps, n'est pas mesurée par la vitesse, mais par les changements dans la vitesse ; en tant qu'elle y réside, c'est-à-dire au sens de Leibnitz, elle n'est pas représentée par la quantité de mouvement ou produit de la masse par la vitesse, puisque cette quantité ne peut pas se transmettre d'un corps à un autre sans changement de valeur. « La force appliquée à un corps, que rien n'empêche de se mouvoir, continue de Mairan, y produit donc du mouvement ; de ce que je conçois un corps en mouvement, je conçois une force qui le fait mouvoir. Ce mouvement peut être uniforme ; comme tel il ne saurait nous indiquer d'autre mesure de la force qui le produit que la simple vitesse du mobile multipliée par sa masse. » Ce passage n'a pas plus de sens que le précédent, car de ce que je conçois un corps en mouve-

rigide se déplace seulement sur une sphère. Si la suspension se compose de deux fils rigides, la trajectoire est une circonférence; enfin, s'il y a trois fils rigides, le centre de la balle est immobile.

Généralement, on peut dire qu'un système est libre, par rapport à un élément géométrique, quand cet élément (angle ou distance) n'est pas nécessairement invariable. Cette liberté peut être unilatérale ou bilatérale, et cette distinction est assez fondamentale pour qu'il soit nécessaire d'insister.

Soit considéré dans un système un certain angle dont nous désignons la valeur actuelle par θ : la liberté est dite bilatérale lorsque les conditions géométriques imposées n'empêchent pas de donner à cet angle une valeur plus grande et une valeur plus petite que θ. De même, soit considérée dans un système une certaine distance dont nous désignons la valeur actuelle par d : la liberté est dite bilatérale lorsque les conditions géométriques imposées n'empêchent pas de supposer à cette distance des valeurs plus grandes et plus petites que d. La liberté est au contraire unilatérale lorsque l'angle ou la distance ne peuvent recevoir qu'un accroissement ou qu'une diminution, et non pas l'un et l'autre. Ainsi, lorsqu'une balle est attachée à un point fixe par un fil rigide, la liberté est bilatérale sur une sphère de rayon égal à la longueur du fil, parce que, à partir d'une position donnée sur cette sphère, deux petits mouvements en sens inverse sont également possibles sur la sphère ; la liberté est nulle vers l'intérieur ou l'extérieur de la sphère. Si le fil de suspension n'est pas rigide, la liberté reste toujours bilatérale sur la sphère dont le rayon est égal à la longueur du fil ; mais, à partir d'un point de cette sphère et en dehors d'elle, la liberté est unilaté-

rale, parce que la distance de la balle au point de suspension peut bien diminuer, mais elle ne peut croître, autant du moins que nous supposons le fil inextensible.

Soit, comme second exemple, un corps placé sur une table : la liberté est bilatérale parallèlement à la table, unilatérale dans un sens perpendiculaire ; car le corps peut bien s'élever au-dessus de la table, il ne peut descendre au dessous.

Jusqu'à présent, nous avons considéré ces liaisons comme de pures conditions géométriques ; mais nous ne devons pas nous borner à cet aperçu trop abstrait. Les liaisons, par le fait même qu'elles peuvent, le cas échéant, gêner les mouvements, sont capables de donner naissance à des forces. Assurément, ces forces sont généralement impossibles à mesurer directement ; mais cetté impossibilité d'une détermination directe ne peut faire mettre en doute leur existence. Ces forces sont d'ailleurs d'une nature particulière ; elles n'existent pas du seul fait de la liaison ; il faut, pour leur donner une existence réelle, qu'une force telle qu'une traction ou une pression, intervienne. De ce qu'un corps est suspendu par une corde à un clou, il ne résulte pas nécessairement une action de la corde et du clou sur le corps. Mais, si le corps est pesant, la corde se tend, et à ce moment seulement la liaison intervient comme une véritable force pour annuler la pesanteur.

II

Ceci posé, cherchons à résoudre le problème suivant : Dans quel cas plusieurs forces peuvent-elles se faire équilibre ?

Il est clair que la solution dépend de la définition que nous donnerons de l'équilibre. Si nous disons que des forces se font équilibre lorsque leurs effets simultanés sont nuls, il ne peut jamais y avoir équilibre ; car deux efforts, appliqués comme on voudra à un corps, le déforment nécessairement. Aussi n'envisage-t-on pas l'équilibre d'une manière aussi générale, mais simplement par rapport à la propriété des forces d'engendrer le mouvement. On dit que des forces se font équilibre si, appliquées simultanément à un système, celui-ci reste immobile. On fait abstraction des petites déformations que ces forces produisent sur les parties nécessairement plus ou moins élastiques du système.

Pour aller du simple au complexe, imaginons qu'une seule force agisse sur le système considéré et cherchons les conditions d'équilibre.

Puisque, par la définition même de la force, elle tend à produire un mouvement, le mouvement aura lieu effectivement et il n'y aura pas équilibre, si rien ne s'oppose à l'action de cette force. D'où résulte nécessairement qu'un système ne peut être immobile sous l'action d'une force unique, que s'il intervient des liaisons qui, le cas échéant, donneront naissance à des forces.

De plus, nous pouvons admettre comme un fait d'expérience vulgaire que deux tractions ou deux pressions

égales et de sens contraires détruisent leurs effets, non certes en ce qui touche les déformations, mais en ce qui touche le mouvement produit. Si nous attelons à un chariot et en sens inverse deux chevaux également forts, le véhicule reste immobile, bien que les planches avec lesquelles il est construit puissent être déformées, et même disjointes ou brisées, si l'on dépasse leur limite d'élasticité.

D'où cette conclusion : pour qu'un système soit en équilibre sous l'action d'une force unique, il faut qu'il existe des liaisons capables de donner naissance à une seconde force égale et opposée à la première. D'où enfin cette règle : la recherche des positions d'équilibre revient à celle des positions pour lesquelles les liaisons donnent naissance à une force égale et opposée à la force donnée : c'est une application fondamentale du grand principe de l'égalité de l'action et de la réaction dans l'équilibre.

Nous n'en sommes guère plus avancés, car, ainsi que nous l'avons fait remarquer, il est très difficile pratiquement, pour ne pas dire impossible, de mesurer directement les forces qui proviennent des liaisons, et il serait avantageux de remplacer cette règle par une autre où ces forces n'intervinssent pas.

Nous y parviendrons par les considérations suivantes :

A partir d'un état donné d'un système, les liaisons laissent généralement plusieurs mouvements possibles pour chacune de ses parties ; ces déplacements ne se feront pas nécessairement, mais rien n'empêche que nous ne les supposions arbitrairement réalisés. Pour les distinguer d'un déplacement qui aurait réellement lieu, nous les appellerons déplacements virtuels. Par exemple, si un corps est posé sur une table en un point A, rien n'empêche de

lui supposer toute une série de petits déplacements virtuels à partir de ce point A dans tout l'espace au-dessus de la table.

Pour chacun de ces petits déplacements il existe un petit travail de la force donnée, travail que nous appellerons travail virtuel correspondant au déplacement. Il est positif ou négatif, suivant que l'angle de la force et du déplacement, que l'on peut, vu sa petitesse, considérer comme rectiligne, est aigu ou obtus. Si l'angle est aigu, ou le travail positif, la force favorise le déplacement; s'il est obtus, ou le travail négatif, la force gêne le déplacement. Enfin, si l'angle est droit, le travail est nul et la force ne gêne ni ne favorise le déplacement.

Or, puisque par hypothèse les petits déplacements en question sont possibles ou, ce qui revient au même, ne sont pas empêchés par les liaisons; et puisque tous les mouvements qui correspondent à un travail positif sont favorisés par la force, il résulte que, pour que la position initiale du système, à partir de laquelle nous supposons effectués ces petits déplacements, soit une position d'équilibre, un travail positif ne peut correspondre à aucun de ces déplacements.

D'où cette première conclusion : pour qu'une position soit d'équilibre, il faut que les liaisons ne permettent à partir d'elle que des déplacements correspondant, au moins tant qu'ils sont petits, à des travaux nuls ou négatifs. Ce qui est de toute évidence.

Cherchons maintenant dans quel cas le travail peut être négatif, dans quel cas il doit être nul. Si pour un certain déplacement le travail est négatif, pour un déplacement de sens contraire il devient positif, car rien n'est changé d'un cas à l'autre que la direction du mouvement; d'obtus

l'angle de la force et du déplacement devient aigu. Il résulte que, si la liberté par rapport à ce déplacement est bilatérale, le travail correspondant à ce déplacement doit être nul pour qu'il y ait équilibre. Si la liberté est unilatérale, le travail peut être négatif. Soit par exemple un corps pesant sur une table horizontale. Pour tous les déplacements parallèles à la table, la liberté est bilatérale, mais le travail est nul. Pour un déplacement vertical de bas en haut, le travail de la pesanteur est négatif, puisqu'elle s'oppose au mouvement ; l'équilibre n'en subsiste pas moins, parce que la liberté est unilatérale, le déplacement de haut en bas, pour lequel le travail serait positif, étant impossible. Le même raisonnement s'applique au cas d'une balle pesante sphérique suspendue par son centre à un point fixe au moyen d'un fil non rigide ; l'équilibre a lieu si le fil de suspension est vertical, bien que pour un déplacement vertical de bas en haut le travail de la pesanteur soit négatif.

Le problème de l'équilibre est donc résolu dans le cas d'une seule force appliquée à un système.

Et, puisque par un raisonnement indépendant nous étions parvenus à cette conclusion que, dans la position d'équilibre, les liaisons devaient nécessairement donner naissance à une force égale et opposée à la force supposée appliquée au système, nous sommes certains que cette condition est réalisée chaque fois que pour les déplacements bilatéraux le travail est nul, que pour les déplacements unilatéraux le travail est nul ou négatif.

Nous sommes maintenant en mesure de préciser ce qu'on appelle équilibre stable, instable et indifférent. Pour savoir s'il y a équilibre dans une position donnée S_1, il faut imprimer au système de corps, à partir de cette posi-

tion, un petit mouvement qui l'amène de S_1 dans une position voisine S_2; à partir de cette seconde position, nous pouvons donner au système un nouveau petit déplacement dans la même direction : plusieurs cas peuvent alors se présenter.

Premièrement, si le travail, nul pour le premier déplacement, reste nul pour le suivant, on dit que l'équilibre est indifférent. Par exemple, soit un corps pesant poli placé sur un plan horizontal poli. Pour un premier déplacement horizontal, le frottement étant nul, et le déplacement normal à la force qui est verticale, le travail est nul. Continuons de mouvoir le corps horizontalement, le travail reste constamment nul, et l'équilibre indifférent.

En second lieu, si le travail, d'abord nul, devient négatif, l'équilibre est stable. Prenons comme exemple un pendule simple déplacé à partir de la verticale. La balle pesante décrit un cercle. Pour un tout petit mouvement, le travail est nul, car la force verticale de la pesanteur coïncide d'abord avec le rayon; elle est donc normale au déplacement qui s'effectue sur le cercle; mais, pour un déplacement plus grand, le poids monte, l'angle du déplacement et de la force est obtus, le travail s'effectue contre la pesanteur, il est négatif; l'équilibre est stable.

En troisième lieu, si le travail, d'abord nul, devient positif, l'équilibre est instable. Soit, comme exemple, un corps pesant poli, placé sur un cylindre poli dont l'axe est horizontal. Le corps est placé, au début de l'expérience, sur la verticale qui passe par l'axe; il y a équilibre, car un petit mouvement s'effectue sur le cercle, et la partie la plus élevée de ce cercle est horizontale, puisque le rayon y est vertical. Mais un mouvement, qui n'est pas très petit, fait descendre le poids; l'angle du déplacement et de la force

est aigu, le travail de la pesanteur est positif; l'équilibre n'a plus lieu : on dit qu'il était instable.

En dernier lieu, nous avons vu que le travail pouvait être négatif dès l'origine du mouvement, pour un certain déplacement, sans que l'équilibre cesse d'exister, à la seule condition que le mouvement opposé à celui que l'on considère soit impossible. Dans ce cas, l'équilibre est stable.

L'exemple le plus simple que l'on puisse donner est celui d'un corps placé sur une table : l'équilibre, que nous avons trouvé indifférent pour les déplacements horizontaux, est stable pour es mouvements verticaux.

III

Il s'agit maintenant de lever la restriction que nous avons introduite, à savoir qu'il n'y a qu'une seule force appliquée au système.

La solution générale dépend du principe suivant connu sous le nom de principe des vitesses virtuelles, appellation fort mauvaise d'ailleurs, ainsi que nous aurons l'occasion de le montrer :

« Un système est en équilibre dans une position donnée si le travail de toutes les forces correspondant à un petit déplacement quelconque parmi les déplacements possibles à partir de cette position est nul, si le déplacement peut être effectué dans les deux sens; est nul ou négatif, s'il ne le peut que dans un seul. »

Ce principe, qui est la généralisation de la règle précédente, conduit à des résultats exacts dans tous les cas où on a voulu l'appliquer. Il semble que cela ne puisse suffire et qu'il serait utile d'en avoir une démonstration

générale. Mais ce serait se méprendre étrangement sur les conditions de certitude de la science. Nous ne saurions mieux faire que de citer à ce propos un passage remarquable d'un mémoire de Poinsot sur l'équilibre et le mouvement des systèmes.

« Une démonstration générale du principe des vitesses virtuelles devrait au fond revenir à établir la mécanique entière sur une autre base : car la démonstration d'une loi qui embrasse toute la science ne peut être autre chose que la réduction de cette science à une autre loi aussi générale, mais évidente, ou du moins plus simple que la première, et qui, partant, la rende inutile. Chercher à démontrer le principe des vitesses virtuelles pour l'heureux usage qu'on en a fait, c'est chercher à s'en passer pour cet usage même, soit en trouvant quelque autre loi aussi féconde, mais plus claire, soit en fondant sur d'autres principes une théorie générale de l'équilibre, dont les propriétés des vitesses virtuelles ne deviennent plus alors qu'un simple corollaire. En d'autres termes, si l'on essayait de mettre d'une manière générale et bien développée, à la tête d'une mécanique basée sur ce principe, sa démonstration, l'ouvrage se trouverait fait deux fois : je veux dire que cette démonstration comprendrait déjà toute la mécanique. »

Et ce que Poinsot dit ici excellemment du principe des vitesses virtuelles, nous le pourrions répéter textuellement pour un principe quelconque. Donner d'un principe une démonstration, c'est lui enlever cette qualité d'être un postulat et la transporter aux propositions qui ont servi à sa démonstration. La question actuelle revient donc à la suivante : A quel caractère peut-on juger qu'un principe mérite d'être conservé comme tel, puisqu'aussi bien,

ainsi qu'il résulte même des discussions présentées au premier chapitre, des postulats non évidents sont indispensables, les propositions évidentes étant trop générales pour qu'on en puisse tirer le détail des phénomènes.

Ce caractère est le suivant : il importe assez peu que le principe soit clair ou obscur, la clarté ou l'obscurité étant choses fort relatives ; il importe qu'il soit général. Or, ainsi que nous le verrons, nous possédons d'autres principes qui sont tout aussi généraux que le précédent, et qui sont au moins aussi clairs. Mais le principe du travail virtuel a sur les autres cet avantage incomparable d'introduire la notion fondamentale du travail, qui n'est pas seulement une simple définition, une entité algorithmique, mais quelque chose de mesurable, non seulement dans ses éléments constitutifs, espace et force, mais en soi, ayant une existence objective, susceptible de transformation et d'équivalence.

Enfin, il permet de négliger toutes les réactions produites par les liaisons dont l'estimation individuelle serait extrêmement difficile.

Aussi l'admettrons-nous sans démonstration et nous contenterons-nous de le légitimer par ses conséquences.

Nous admettrons d'une manière analogue que tout ce qui a été dit des différentes sortes d'équilibre reste vrai, quel que soit le nombre des forces.

IV

Dans le cas où les forces qui agissent sur le système admettent un potentiel, et nous avons vu qu'il en était ainsi chaque fois que le travail, correspondant au passage d'une position à une autre position, est indépendant des trajectoires choisies, le principe du travail virtuel prend une forme particulièrement intéressante.

On dit qu'une grandeur est fonction d'une autre grandeur lorsque les valeurs de la première dépendent des valeurs de la seconde. Ainsi la température de l'atmosphère est une fonction de l'heure. L'une des grandeurs s'appelle la variable (heure ou temps); l'autre, la fonction (température). On peut dresser un tableau à double entrée: dans la première colonne sont les valeurs de la variable; dans la seconde, celles de la fonction. Supposons que, pour une certaine valeur de la variable (deux heures de l'après-midi), la fonction ait une certaine valeur (25° C.). On dit que pour cette valeur particulière de la variable la fonction passe par un maximum, lorsque pour toutes les valeurs de la variable voisines de cette valeur (deux heures moins cinq minutes, moins dix, etc., deux heures cinq minutes, dix, etc.), la fonction a des valeurs plus petites (moindres que 25°).

Pour un minimum, les valeurs de la fonction pour des valeurs voisines de la variable seraient plus grandes. Dire que la température est minima à deux heures du matin, c'est dire qu'elle prend à cette heure-là sa plus petite valeur.

Lorsqu'une grandeur atteint une valeur maxima ou mi-

nima, elle semble constante aux environs de ce maximum ou minimum. Par exemple, la longueur des jours est maxima au solstice d'été, minima au solstice d'hiver ; on se convaincra, en consultant un calendrier, qu'à ces époques plusieurs jours consécutifs ont la même durée. La température de l'atmosphère est maxima vers deux heures de l'après-midi, minima à deux heures du matin ; on sait par une expérience journalière qu'elle varie peu entre une heure et trois heures. Un pendule qui oscille attèint son maximum de vitesse quand il passe par la verticale ; les expériences montrent qu'autour de cette position cette vitesse est sensiblement constante. Et réciproquement on peut dire que, lorsqu'une grandeur variable en fonction d'une autre grandeur, comme la température en fonction des heures, la longueur des jours en fonction des dates, la vitesse du pendule en fonction de l'angle qu'il fait avec la verticale, lorsqu'une telle grandeur cesse de croître, elle passe généralement par un maximum ou un minimum.

Revenons au cas où les forces qui agissent sur le système ont un potentiel. Nous avons vu que le travail T_{12}, effectué par ces forces dans le passage du système de la position 1 à la position 2, est égal à la variation de l'énergie potentielle, ou, pour préciser, à la différence $E_1 - E_2$ des énergies potentielles qui caractérisent ces deux positions. Soit 1 une position d'équilibre, et 2 une position quelconque très voisine; le travail T_{12} est généralement nul, d'où résulte que l'on a généralement $E_1 = E_2$; l'énergie potentielle est constante pour toutes les positions voisines de la position d'équilibre, elle y passe donc par un minimum ou un maximum.

Mais on peut aller plus loin. Nous avons vu que l'équilibre stable est caractérisé par ce fait que, si l'on prend la

position 2 un peu plus éloignée de la position 1 que précédemment, le travail des forces est négatif; ce qui nécessite l'inégalité $E_2 > E_1$. Une position d'équilibre stable jouit donc de cette propriété que l'énergie potentielle y est minimum. Inversement, l'équilibre instable est tel que le travail des forces est positif dans le passage de la position 1 à la position 2 ; pour une position d'équilibre instable, l'énergie potentielle est donc maximum.

En définitive, un système est à l'état d'équilibre stable lorsque l'énergie potentielle a la plus petite valeur possible, étant données ses liaisons actuelles.

Bien que cela ne résulte point encore de nos postulats, nous pouvons admettre, comme un fait d'expérience, qu'un système tend toujours vers un état d'équilibre stable et finit par s'y arrêter, ce que nous traduisons dans notre langage conventionnel par cette formule : « L'énergie potentielle d'un système tend toujours vers un minimum. » Ce n'est encore évidemment là qu'une manière de dire les choses ; nous verrons plus tard, quand il nous sera possible de restituer à l'expression d'énergie potentielle une signification plus concrète, de lui supposer une existence objective, d'imaginer existant déjà sous une certaine forme tout le travail que des forces sont capables d'accomplir, nous verrons de quelle généralisation cette formule est susceptible.

Nous allons appliquer ces considérations à l'équilibre d'un système de corps pesants.

Prenons comme terminus de tous les déplacements la surface du sol, et soit un corps de poids P placé à une hauteur H. Son énergie potentielle est PH, ainsi qu'il a été expliqué. Le produit PH représente, en effet, le travail que peut accomplir la force de la pesanteur, lorsque le

corps tombe de sa position actuelle sur le sol. Pour l'équilibre le principe du travail virtuel nous apprend que l'énergie potentielle est minimum. Or le poids P est invariable, donc la hauteur H est la plus petite possible ; le corps est aussi rapproché du sol que le lui permettent les liaisons. S'il est par exemple attaché par un fil à un point fixe, sa position d'équilibre stable correspond à la direction verticale du fil, etc.

Si le système est composé de plusieurs poids P_1, P_2, P_3, P_4, dont les hauteurs au-dessus du sol sont H_1, H_2, H_3, H_4, l'énergie potentielle du système est égale à la somme $H_1P_1 + H_2P_2 + H_3P_3 + H_4P_4$. La position d'équilibre stable correspond donc à la forme du système compatible avec les liaisons, pour laquelle cette somme est la plus petite possible. Cette proposition a été énoncée par Torricelli, disciple de Galilée, en 1644, sous une forme un peu différente. On appelle centre de gravité d'un système de corps pesants un point autour duquel les poids sont symétriquement disposés, avec cette convention que l'on peut remplacer un certain poids situé à une certaine distance sur une direction par un poids double placé à une distance deux fois moindre, triple placé à une distance trois fois moindre, etc., sur la même direction. Partant de cette définition, il est facile de prouver que la hauteur h du centre de gravité au-dessus du sol est donnée par la relation :

$$h = \frac{H_1P_1 + H_2P_2 + H_3P_3 + H_4P_4}{P_1 + P_2 + P_3 + P_4}$$

Le dénominateur de cette fraction est constant ; le numérateur est minimum pour l'équilibre. On a donc le fameux

principe: « Dans une machine à poids en équilibre, le centre de gravité est le plus bas possible. »

C'est une conséquence immédiate du principe des vitesses virtuelles. Mais on pourrait aussi le prendre comme un postulat presque évident, puisqu'il revient à dire qu'il répugne à la nature des corps graves de monter, et en déduire le principe même du travail virtuel.

Cette voie a été suivie par Lagrange dans sa *Mécanique analytique*. Il remarque qu'on peut ramener toute machine à une machine à poids, au moins pour ce qui est d'un petit mouvement à partir d'un position donnée. Il n'y a qu'à substituer un poids à chacune des forces utiles au moyen de cordons attachés aux points d'application de ces forces passant sur des poulies de renvoi. Par exemple (*fig.* 6), soit A le point d'application d'une force F, AB le petit déplacement, *F* la force utile correspondant à ce déplacement. Attachons en A le cordon ABC, qui passe sur la poulie C,

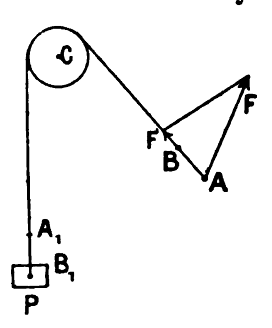


Fig. 6.

et suspendons à ce cordon un poids P = *F*. Dans l'équilibre (par hypothèse maintenant) le centre de gravité est au point le plus bas possible, ou, si l'on veut, dans une situation telle qu'il ne descendra pas, quelque petit mouvement qu'on imprime aux pièces de la machine. Or, par définition, le produit de la distance du centre de gravité au sol par la somme des poids est égal à la somme des produits des poids par leurs distances respectives au sol. La condition précédente revient à dire que, pour un petit mouvement imprimé aux pièces de la machine, cette somme de produits ne varie pas. Mais la variation individuelle de chacun

de ces produits est égale au travail respectif des diverses forces utiles, puisque cette variation mesure le produit de la force utile (égale au poids) par le déplacement de son point d'application (égal au déplacement du poids). La condition revient donc à dire que pour l'équilibre la somme des travaux des forces est nulle : c'est le principe même des vitesses virtuelles. Ainsi, suivant qu'on estimera plus évident le principe ou sa conséquence, on pourra arbitrairement prendre l'un ou l'autre comme fondamental.

V

Le principe du travail virtuel, nous apprenant sous quelles conditions un système est en équilibre, semble avoir un rôle pratique assez restreint ; car généralement les machines ne sont pas faites pour que leurs parties restent immobiles, et elles n'acquièrent d'utilité que par le mouvement de ces parties. Cependant il nous suffit d'une remarque très simple pour étendre considérablement la portée de notre principe.

Supposons que l'on ait trouvé pour une machine toute une série de positions d'équilibre, telles que l'on puisse passer virtuellement, sans discontinuité, de l'une à l'autre. La machine mise dans une de ces positions ne peut pas en sortir, puisque l'équilibre existe par hypothèse. Si donc on peut supposer que virtuellement la machine passe par la suite de ces positions, il est clair qu'elle n'y passera pas réellement. On peut donner comme exemple le cas où un corps pesant et non soumis à une autre force se déplacerait sur une table horizontale : les positions successives sont d'équilibre. Il est clair que l'on peut supposer un

pareil mouvement en tant que virtuel, mais qu'en réalité il n'y a pas de raison pour que ce mouvement s'effectue. Autre exemple : une poulie qui porte une corde sans poids à chaque extrémité de laquelle sont suspendus des poids égaux.

Il semble absolument puéril de chercher ce qui se passerait pour une semblable série de modifications, puisque la nature ne nous en offre guère d'exemples : nous verrons qu'il n'en est rien.

Dans nos hypothèses, quel que soit le petit déplacement de la machine, il lui correspond un travail total nul, puisqu'il y a équilibre. Et ce résultat, vrai pour tous les petits déplacements, reste encore évidemment vrai pour une déformation ou un mouvement quelconque, grand ou petit, de la machine. Si arbitrairement nous distinguons les forces qui sont appliquées sur cette machine en forces puissances et en forces résistances, nous pouvons donc conclure que, quel que soit le déplacement, les travaux de ces deux groupes sont égaux en valeur absolue, mais de signes contraires, de manière que leur somme soit nulle.

Ainsi que nous l'avons fait remarquer, si nos hypothèses sont rigoureusement appliquées, les déplacements seront virtuels et ne s'effectueront pas en réalité ; mais il nous suffit d'augmenter très peu les forces puissances dont le travail est positif : l'équilibre n'est plus rigoureusement réalisé, mais seulement d'une manière approximative ; les vitesses des déplacements ne sont plus nulles, mais seulement très petites ; et nous pouvons énoncer ce résultat fondamental, conséquence nécessaire du principe du travail virtuel : « Dans toute machine dont les pièces se meuvent toujours très lentement, la somme des travaux des forces correspondant à un déplacement quelconque

est sensiblement nulle ; et, si l'on distingue ces forces en puissances et en résistances, le travail positif des premières est presque égal et tant soit peu supérieur à celui des secondes. »

Plus tard nous pourrons généraliser encore les applications du principe, en supprimant cette restriction que la vitesse des organes de la machine doit toujours rester petite. Nous montrerons que, si les vitesses des organes, vitesses d'ailleurs quelconques, repassent périodiquement par les mêmes valeurs, et si on évalue le travail total des puissances et celui des résistances entre deux tels passages, on trouve ces travaux numériquement égaux. Sous cette forme, le principe s'applique dans tous les cas à toutes les machines.

Nous allons tirer de là des corollaires d'une importance capitale touchant le rôle des machines. Dans la pratique il se présente des travaux à effectuer, terres à déplacer, fardeaux à élever, etc., travaux que l'on peut évaluer en kilogrammètres. Pour les accomplir nous possédons des puissances, tels que des hommes, des chevaux, etc., et des intermédiaires qui sont des machines ou systèmes qui n'interviennent qu'en créant des forces de liaison. Il résulte du principe que, si nous avons à effectuer un travail déterminé représenté par un certain nombre de kilogrammètres, le travail que doivent fournir les puissances lui est certainement supérieur et seulement égal dans l'hypothèse la plus favorable.

La puissance d'un agent est donc complètement connue, quand on sait la quantité de travail qu'il peut fournir sans machines : les machines sont incapables d'en créer si peu que ce soit.

Bien plus, nous avons supposé jusqu'à présent que les

machines produisaient seulement des forces de liaison, qui n'interviennent pas dans le principe de travail virtuel. Ce n'est pas complètement exact. Elles introduisent encore des forces dites de frottement, dont le travail ne peut pas être négligé dans l'application du principe; qui par nature augmentent toujours le travail négatif ou résistant, et nécessitent conséquemment une augmentation égale du travail des puissances : il y aurait donc, au point de vue du rendement, avantage à ne pas se servir de machine.

Quel est donc le rôle des machines ? Il est uniquement de permettre de choisir pour le travail de l'agent le mode de dépense le plus convenable.

Car il est évident que, si l'homme peut fournir 205,000 kilogrammètres par jour, c'est à la condition que son effort soit lent et continu; s'il cherchait à donner en peu de temps toute cette quantité d'action, ce serait en vain. Mais, s'il a besoin de dépenser ces 205,000 kilogrammètres en un instant, une machine lui donne le moyen d'accumuler ce travail, de l'emmagasiner, et d'en faire ensuite l'emploi dans un temps aussi court qu'il le voudra.

Il n'est pas inutile, en effet, de montrer que la puissance des agents vivants, évaluée en kilogrammètres, dépend essentiellement de la façon dont ils doivent fournir ce travail.

Coulomb fit monter par des ouvriers exercés du bois de chauffage. Pour estimer la quantité d'action, il faut multiplier par la hauteur totale parcourue suivant la verticale le poids de l'homme plus le poids de sa charge. L'homme montait six voies de bois par jour à 12 mètres en soixante-six voyages. Il était chargé à chaque voyage de 68 kilogrammes, ce qui portait à $68 + 70 = 138$ kilogrammes le

fardeau déplacé, en lui supposant un poids de 70 kilogrammes. D'où, en tout, une quantité d'action de $138 \times 66 \times 12 = 109,000$ kilogrammètres, tandis qu'il en peut fournir moyennement 205,000 lorsqu'il monte à vide. Son travail utile est beaucoup plus grand s'il monte le bois à l'aide d'un treuil, au lieu de le porter sur ses épaules, à la condition toutefois que la vitesse de son travail ne dépasse pas une certaine limite.

Laissons donc pour l'instant les agents animés, dans lesquels les phénomènes sont trop complexes pour que nous les puissions encore discuter. Les propositions précédentes prouvent que, si nous avons à notre disposition un certain nombre de kilogrammètres à dépenser, nous ne pouvons, quelle que soit la machine employée, recueillir après des transformations quelconques de ce travail, qu'un travail, plus petit, ou égal, si nous négligeons les frottements.

Cette conclusion nous amène nécessairement à considérer le travail comme quelque chose d'existant objectivement, susceptible de prendre des formes diverses, mais équivalentes et échangeables; nous entrevoyons déjà la possibilité de restituer en quelque sorte à l'énergie potentielle son sens concret. On ne peut créer du travail, ce travail se conserve, au moins avec les restrictions précédentes.

Remarque essentielle: le temps n'intervient pas dans l'estimation du travail. Assurément il peut nous être plus commode de pouvoir dépenser un travail disponible soit tout d'un coup, soit lentement; on a même créé une unité particulière, le cheval-vapeur, qui indique en même temps le nombre de kilogrammètres que l'agent peut effectuer et le temps nécessaire à cette opération. Mais ce sont là

des renseignements d'un ordre tout différent. La lenteur plus ou moins grande que nous mettons à utiliser un travail ne peut servir de mesure à sa grandeur, pas plus que le nombre d'années qu'un homme mettra à se ruiner, ne sert à évaluer le chiffre actuel de sa fortune.

Tandis que le travail possède une réalité objective, l'effort ne représente rien de tel. En tant qu'effort, il ne produit aucun effet durable ; dès qu'il cesse, tout cesse avec lui, et son effet ne survit pas à son action. Si un corps pesant soutenu par une table perdait tout à coup son point, la table cesserait d'être pressée dans le même instant. Ce n'est qu'en tant que l'effort produit des déformations élastiques, par conséquent des déplacements de son poids d'application et du travail, qu'il produit quelque effet durable. A proprement parler, la quantité d'effort ou de force n'est pas constante dans l'univers, on peut créer de la force.

Lorsqu'un fil est tendu par un poids, les divers éléments de ce fil sont sollicités à se séparer par la traction du poids ; comme ils restent au contact, c'est qu'il s'exerce entre eux une force qui contre-balance l'effet du poids. Plus nombreux sont ces éléments, plus nombreuses sont les forces. Il suffit de prendre des fils de plus en plus longs et d'y suspendre un même poids. La traction qu'exerce ce poids développe entre ces éléments des forces dont le nombre est aussi grand que nous le voulons.

VI

Descartes a le grand mérite d'avoir formulé, le premier, avec une netteté singulière le principe du travail virtuel et d'en avoir tiré la théorie des machines simples. Il expose ses idées dans un petit *Traité de mécanique* qui mérite une étude approfondie. Ce traité courait déjà manuscrit dès 1638 ; il a été traduit en français et publié seulement en 1668, sous le titre : *Explication des machines et engins par l'aide desquels on peut avec une petite force lever un fardeau fort pesant.*

« L'invention de tous ces engins, dit Descartes, n'est fondée que sur un seul principe, qui est que la même force (lisez travail), qui peut lever un poids, par exemple, de 100 livres à la hauteur de 2 pieds, en peut aussi lever un de 200 livres à la hauteur d'un pied ou de 400 à la hauteur d'un demi-pied, et ainsi des autres, si tant est qu'elle lui soit appliquée... Car c'est le même de lever 100 livres à la hauteur d'un pied et de rechef encore 100 à la hauteur d'un pied, que d'en lever 200 à la hauteur d'un pied, et le même aussi que d'en lever 100 à la hauteur de 2 pieds. » Ceci posé, il remarque que toutes les machines se peuvent rapporter à la poulie, au plan incliné, au coin, au tour ou à la roue, à la vis et au levier, et il passe en revue successivement ces engins qu'on appelle communément simples.

La poulie. — « Soit (*fig.* 7) ABC une corde passée autour de la poulie D, à laquelle poulie soit attaché le poids E... Faisons après cela que A, l'un des bouts de cette corde,

étant attaché ferme à quelque clou, l'autre C soit soutenu par un homme. Il est évident que cet homme en C n'aura besoin, pour soutenir le poids E, si ce poids pèse 200 livres, que de la force qu'il faut pour soutenir 100 livres. Enfin, posons que cet homme qui est vers C tire la corde pour faire hausser le poids E. Il est évident que, s'il y emploie la force (lisez travail) qu'il faut pour lever 100 livres à la hauteur de 2 pieds, il fera hausser le poids E, qui en pèse 200, de la hauteur d'un pied.

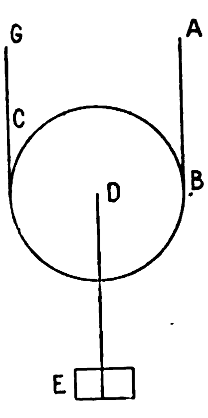


Fig. 7.

Il y a toutefois une chose qui empêche que ce calcul ne soit exact, à savoir la pesanteur de la poulie et la difficulté qu'on peut avoir à faire couler la corde et à la porter ; mais cela est fort peu à la comparaison de ce qu'on lève et ne peut être estimé qu'à peu près... On doit aussi remarquer qu'il faut toujours un peu plus de force pour lever un poids que pour le soutenir. »

Le plan incliné. — « Si, n'ayant qu'assez de force pour lever 100 livres, on veut néanmoins lever le corps F, qui en pèse 200, à la hauteur de la ligne AB, il ne faut (*fig.* 8) que le tirer ou rouler le long du plan incliné CA, que je suppose deux fois aussi long que la ligne AB ; car par ce moyen, pour faire parvenir au point A, on y emploiera la force (lisez travail) qu'il faut

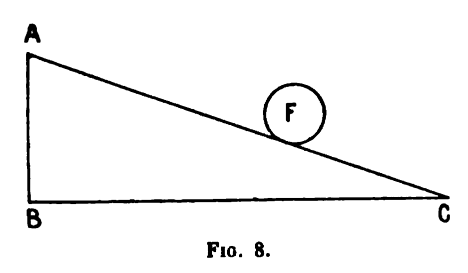


Fig. 8.

pour faire monter 100 livres deux fois aussi haut. Et d'autant qu'on aura fait ce plan CA plus incliné, d'autant aura-t-on besoin de moins de force pour lever le poids par son moyen.

Mais il y a encore à rabattre de ce calcul la difficulté qu'il y aurait à mouvoir le corps F le long du plan AC, si ce plan était couché sur la ligne BC, dont je suppose toutes les parties également distantes du centre de la terre. Cet empêchement est d'autant moins considérable que le plan est dur, plus égal et plus poli. »

LE COIN. — « La puissance du coin ABCD (*fig.* 9) s'entend d'elle-même en suite de ce qui vient d'être dit du plan incliné ; car la force dont on frappe dessus agit comme pour le faire mouvoir suivant la ligne BD, et le bois ou autre corps qu'il fend ne s'entr'ouvre ou bien le fardeau qu'il soulève ne se hausse que selon la ligne AC: de façon que la force dont on pousse ou frappe ce coin doit avoir même proportion à la résistance de ce bois ou de ce fardeau que la ligne AC à la ligne AD. »

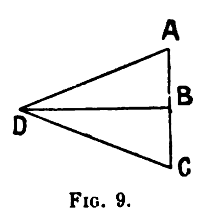


FIG. 9.

LA ROUE. — « On voit aussi fort clairement que la force dont on tourne la roue A ou les chevilles B qui font mouvoir le tour ou cylindre C, (*fig.* 10) sur lequel se roule une corde à laquelle le poids D qu'on veut lever est attaché, doit avoir la même proportion

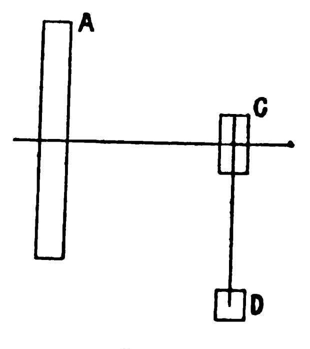


FIG. 10.

avec ce poids que la circonférence de ce cylindre avec la circonférence du cercle que décrit cette force, ou, ce qui est le même, que le diamètre de l'un avec le diamètre de l'autre. »

La vis. — « Lorsqu'on sait la puissance du tour et du plan incliné, celle de la vis est aisée à connaître et à calculer ; car elle n'est composée que d'un plan fort incliné qui tournoie sur un cylindre ; et, si ce plan est tellement incliné que le cylindre doive faire, par exemple, dix tours pour s'avancer de la longueur d'un pied dans l'écrou, et que la grandeur de la circonférence du cercle que décrit la force qui le tourne soit de dix pieds, à cause que dix fois dix font cent, un homme seul pourra presser aussi fort avec cette vis que cent pourraient faire sans elle, pourvu seulement qu'on en rabatte la force qu'il faut pour la tourner. »

Le levier. — Descartes ne se contente pas de la théorie élémentaire du levier, il en étudie le détail. En supposant que le levier n'a ni poids ni épaisseur et se réduit à une ligne, l'application du principe montre que les poids doivent être en raison inverse des bras de levier, de sorte que, si l'on forme les produits de chaque poids par le bras correspondant, on obtienne le même résultat : nous reviendrons plus loin sur cette proposition. « Il serait utile, conclut Descartes, pour ceux qui se mêlent d'inventer de nouvelles machines, qu'ils ne sussent rien de plus en cette matière que ce que je viens d'en écrire, car ils ne seraient pas en danger de se tromper en leur compte, comme ils font souvent en supposant d'autres principes. Au reste, on peut appliquer les engins ici expliqués en une infinité

de diverses façons et il y a une infinité d'autres choses à considérer dans les mécaniques, dont je ne dis rien à cause que mes trois feuillets sont remplis et que vous n'en avez pas demandé davantage. »

VII

Avant Descartes le principe des vitesses virtuelles ou du travail virtuel avait été énoncé, pour la première fois, par Galilée sous une forme qui a prêté dans la suite à bien des malentendus. Le principe du travail consiste, dans l'application, à multiplier chaque force utile, F_1, F_2, etc., par le déplacement $\delta_1 \delta_2$ de son point d'application, et à additionner tous ces produits : s'il y a équilibre, cette somme est nulle, $F_1\delta_1 + F_2\delta_2 + \ldots = 0$. Or tous ces déplacements sont liés les uns aux autres et s'effectuent dans le même temps très petit θ.

Il est évident que, si l'on a $F_1\delta_1 + F_2\delta_2 + \ldots = 0$, on a encore :

$$\frac{F_1\delta_1}{\theta} + \frac{F_2\delta_2}{\theta} + \ldots = 0.$$

Comme on appelle vitesse du mobile le quotient de l'espace parcouru par le temps employé à le parcourir, les quotients :

$$\frac{\delta_1}{\theta}, \ \frac{\delta_2}{\theta} \ \text{etc.},$$

sont les vitesses respectives v_1, v_2, etc., des points d'application des forces F_1, F_2. On a donc pour l'équilibre $F_1v_1 + F_2v_2 + \ldots = 0$. D'où le nouvel énoncé du prin-

cipe du travail virtuel, mathématiquement équivalent au précédent : « Si, à partir d'une position d'équilibre, on donne une petite déformation au système, les points d'application des forces prennent des vitesses v_1, v_2, etc., et la somme des produits de ces vitesses par la partie utile des forces correspondantes est nulle. » Dans le cas de deux forces on a :

$$F_1 v_1 + F_2 v_2 = 0, \quad \frac{F_1}{F_2} = -\frac{v_2}{v_1}.$$

Les forces utiles sont en raison inverse de la vitesse des déplacements de leurs points d'application : c'est l'énoncé de Galilée. Et, pour peu qu'on examine les conditions de l'équilibre dans le levier et les autres machines simples, on reconnaît aisément que cette règle est parfaitement exacte.

Mais, si mathématiquement les deux énoncés sont équivalents, celui de Descartes est infiniment préférable. Quand avec Descartes on écrit que pour l'équilibre les travaux des résistances et des puissances correspondant à un petit déplacement sont égaux en valeur absolue et de signe contraire, on est tout naturellement conduit à prendre ces travaux comme mesurant la puissance des agents moteurs et des agents résistants, à donner à ces travaux une existence objective et à les considérer ensuite indépendamment de cette équation d'équilibre où ils entrent.

Si, au contraire, avec Galilée, on écrit que pour l'équilibre il faut, non plus évaluer les travaux des puissances et des résistances correspondant à un petit déplacement et écrire qu'ils sont égaux en valeur absolue, mais écrire cette égalité pour les quotients de ces travaux par le

temps nécessaire au petit déplacement, bien que cela revienne mathématiquement au même, ne sera-t-on pas tenté de considérer comme mesure de la puissance de l'agent moteur ou résistant, non pas le travail qu'il peut effectuer, mais le quotient de ce travail par le temps. De sorte qu'un agent n'est plus caractérisé par un certain nombre de kilogrammètres, indépendamment de toute autre considération ; mais encore par ce fait qu'il peut dépenser ces kilogrammètres en un certain temps. Cette manière de compter peut avoir pratiquement son utilité : c'est ainsi qu'on estime la puissance des machines en chevaux-vapeur par le nombre de fois 75 kilogrammètres qu'elles peuvent dépenser par seconde; et, en ce sens, il est légitime de donner une certaine importance au quotient du travail par le temps. Mais ce serait une erreur grossière, si on considérait ce quotient comme existant objectivement, comme ayant une réalité en dehors des équations où il entre.

On objectera que nous supposons bien gratuitement des erreurs ; mais l'histoire corrobore nos craintes et même ce n'est pas encore à ces conséquences qu'on s'est arrêté dans l'interprétation de l'énoncé de Galilée ; on est allé plus loin jusqu'à l'extrême limite de l'absurde.

Après avoir été tenté de donner au produit d'une force par une vitesse une réalité objective, on a fait un pas de plus. Comme les forces que l'on a pratiquement à envisager sont des poids et que ces poids sont, au moins en un même lieu, proportionnels aux quantités de matière ou aux masses, on a finalement confondu la force et la masse, et on est arrivé, vers la fin du XVIIe siècle, à considérer le produit d'une masse par une vitesse, ce que nous appellerons quantité de mouvement, comme caractérisant

la puissance d'un agent. De sorte qu'en définitive, de la quantité que Descartes avait proposée comme mesurant la puissance d'un agent, de ce produit de deux facteurs, force et déplacement, qu'est le travail, il n'est plus rien resté ; la force est devenue une masse, le déplacement une vitesse.

Cette interprétation est assez extraordinaire pour qu'il soit utile d'en prouver la vérité par quelques citations. On lit dans l'*Histoire de l'ancienne Académie* pour 1703 un extrait par Fontenelle d'un mémoire d'Amontons sur le rôle des machines.

Amontons reproche aux machinistes de ne pas savoir calculer avec assez d'exactitude les temps que mettent les diverses puissances à se mouvoir ; il croit bon de les déterminer et il en donne le tableau ci-dessous :

Deux porte-chaises chargés ont fait en 80″ :

Un porte-faix chargé en 139″ :

Un homme de pied allant le pas en 120″ :

Un cheval tirant une charrette chargée de 1,500 livres en 112″ :

Deux chevaux qui tiraient au train ordinaire un carrosse sur le pavé en 62″, etc. :

} 70 toises

Après avoir énuméré toute une série de cas où, à proprement parler, il n'y a aucun travail accompli que l'usure des muscles et les forces de frottement vaincues, puisque les déplacements se font sur des plans horizontaux, il cite ce seul et unique cas où véritablement intervient le travail mesurable :

Un homme du poids de 133 livres a monté à la hauteur de 10 toises 2 pieds dans un escalier en trente-quatre secondes et était entièrement hors d'haleine et hors d'état de continuer. Expérience qui est encore un contresens, puisque ce n'est évidemment pas le travail dépensé qui

essouffle l'homme, mais simplement la rapidité de son allure.

Amontons ne voyait pas que, si on peut équilibrer directement 100 livres et 25, à la condition que leurs mouvements soient ainsi liés que les déplacements verticaux des 100 livres soient quatre fois plus petits que les déplacements verticaux des 25, on ne peut rien en conclure sur les quantités de mouvement imprimées isolément en un certain temps aux deux masses. Il confondait un problème de statique, où les mouvements sont supposés toujours assez lents pour qu'on puisse négliger les vitesses et les quantités de mouvement, et un problème de dynamique très étranger à la question. Si nous avons cru devoir insister sur de pareilles erreurs, c'est que des idées très analogues seront opposées à Leibnitz et considérées pendant quelque temps comme une réfutation sans réplique de ses découvertes.

On peut maintenant comprendre pourquoi Descartes a toujours refusé d'adhérer au principe de Galilée. Pour bien mettre en évidence les raisons et la sagacité du grand philosophe, nous n'avons rien de mieux à faire que de citer quelques fragments de ses lettres.

En 1638, il écrit au Père Mersenne : « Pour ceux qui disent que je devais considérer la vitesse, comme Galilée, plutôt que l'espace pour rendre raison des machines, je crois, entre nous, que ce sont des gens qui n'en parlent que par fantaisie, sans entendre rien à cette matière ; et, bien qu'il soit évident qu'il faut plus de force pour lever un corps plus vite que pour le lever lentement, c'est toutefois une pure imagination que de dire que la force doit être justement double pour doubler la vitesse. » Et plus tard, en 1642 : « La raison qui fait que je reprends ceux

qui se servent de la vitesse pour expliquer la force du levier et autres semblables n'est pas que je nie que la même proportion de vitesse ne s'y rencontre toujours, mais pour ce que cette vitesse ne comprend pas la raison pour laquelle la force augmente ou diminue, comme fait la quantité de l'espace. »

Si on prend garde à la manière dont Descartes résout le problème actuel et si on la met en opposition avec la méthode de Galilée, il n'est pas douteux qu'on se rangera du côté du premier et, malgré l'opinion de Montucla et de plusieurs autres, on ne s'étonnera pas qu'il ait pu écrire au Père Mersenne qu'il a vu les ouvrages de Galilée, mais qu'il n'y a rien trouvé dont il désirât être l'auteur.

Nous ne comprenons pas comment Lagrange, dans sa *Mécanique analytique*, trouve que le principe de Descartes est moins général que celui de Galilée. Car ils sont analytiquement équivalents ; celui de Descartes est métaphysiquement exact et d'une généralisation facile au cas où l'équilibre n'existe plus, tandis que celui de Galilée conduit, dans ce cas, aux erreurs qu'on a vues. Enfin et surtout, Descartes posait implicitement le principe de la conservation du travail et se montrait le digne précurseur de Leibnitz ; car on ne saurait le rendre responsable des opinions de cartésiens trop zélés.

C'est Leibnitz qui rétablit les choses en état et remit dans son vrai jour la notion de travail ; il estime la puissance d'un agent par la hauteur à laquelle il peut élever un poids donné ; considère cette puissance comme ne pouvant être créée ; s'appuie, pour le montrer, sur l'impossibilité du mouvement perpétuel, et dégage le travail des idées de vitesse ou de temps. « En effet, dit-il, le tems ne sert de rien à cette estime. »

Les Bernouilli développèrent les idées de Descartes et de Leibnitz. Daniel Bernouilli s'occupa même particulièrement de la machine humaine; mais, généralisant trop les conséquences du principe que nous discutons, il émit l'opinion que, si la quantité totale de travail dépensé reste constante, il en résultera toujours pour l'homme un même degré de fatigue. C'était aller trop loin et supposer, ce que nous avons vu n'être pas, que l'homme peut fournir un certain nombre invariable de kilogrammètres indépendant des conditions dans lesquelles il dépense le travail. Enfin, Carnot reprit la théorie des machines dans un merveilleux petit livre intitulé : *Principes de l'équilibre et du mouvement*, publié d'abord en 1783 et réédité en 1803. La question y est traitée avec justesse et profondeur. Depuis on n'a rien changé aux principes de cette théorie.

VIII

Le principe des vitesses virtuelles n'est pas le seul qui ait été proposé comme base de la statique; on en peut déduire deux autres aussi généraux, qui ont donc la même valeur analytique, qui sont équivalents dans la pratique, mais qui le cèdent en signification métaphysique. Ce sont les principes du levier et de la composition des forces. Bien que nous ne nous proposions pas de faire une histoire de la mécanique, mais seulement une histoire du développement des notions fondamentales qu'on y rencontre, nous ne pouvons pas les passer sous silence, non pas tant à cause de leur importance actuelle que parce que, sous une forme très générale, celle des quan-

tités vectorielles, nous aurons l'occasion de les retrouver plus loin.

Le principe du levier consiste en ceci : qu'un levier droit et horizontal est en équilibre s'il est chargé de deux poids qui sont en raison inverse de leurs distances au point d'appui. Il nous suffirait de démontrer cette propriété dans ce cas particulier, car on pourrait facilement l'étendre ensuite au cas de forces quelconques et de leviers angulaires ; il est aussi simple d'en fournir une démonstration générale.

Le principe s'énonce alors ainsi : Des forces quelconques appliquées à un corps se font équilibre autour d'un axe fixe, si les sommes des moments de celles qui tendent à faire tourner le corps dans un sens et de celles qui tendent à le faire tourner dans l'autre sont égales. On appelle moment d'une force par rapport à un point le produit de la force par la perpendiculaire abaissée du point sur la direction de cette force. En effet, pour appliquer le principe des vitesses virtuelles, formons le produit des forces utiles par les déplacements des points d'application de ces forces. Soit C (*fig.* 11) le point d'application d'une force, O l'axe de rotation, un petit mouvement amène le point C en C_1, le travail est $CC_1 \times CF_1$, si la force est représentée en grandeur et direction par la droite CF. Or, pour un même angle de rotation, CC_1 est proportionnel à la distance OC du point d'application à l'axe. D'ailleurs, comme CC_1 est un petit arc de circonférence dont OC est le rayon, l'angle OCC_1 est droit ; les deux angles BCC_1 et COB sont égaux comme ayant leurs côtés perpendiculaires.

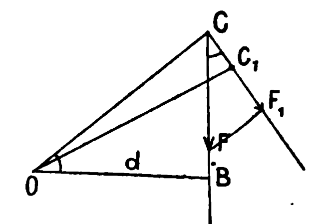


Fig. 11.

Ceci posé, pour un même angle de rotation le travail est proportionnel au produit OC $\times$ F_1 ; je dis qu'il est aussi proportionnel au produit OB $\times$ F, c'est-à-dire au moment de la force. Car échanger ces produits l'un pour l'autre revient, à cause de l'égalité des angles BOC, BCC_1, à remplacer OC par OB qui est plus petit dans un certain rapport, et F_1 par F qui est plus grand dans le même rapport, d'où compensation.

Donc le travail d'une force qui tend à faire tourner le corps autour d'un axe, auquel nous l'avons supposé perpendiculaire, est proportionnel à son moment. Donc enfin, pour que le travail total des forces soit nul, il faut qu'il y ait autant de moments d'un côté que de l'autre, ce qui est le principe du levier.

Ce principe a été découvert par Archimède et utilisé par Galilée pour trouver la force nécessaire à maintenir un corps pesant sur un plan incliné. Roberval en a fait la base de la mécanique.

L'autre principe fondamental est celui de la composition des forces. Il apprend à remplacer des forces par d'autres forces, de telle manière que, les unes se faisant équilibre, les autres se fassent encore équilibre. Soient plusieurs forces F_1, F_2 etc., qui font équilibre à une force F ; remplaçons-les par une seule *F'* qui fasse équilibre à la même force F ; F' est appelée la résultante des forces F_1, F_2, etc.

Il est donc équivalent de dire que le principe de la composition des forces nous apprend à trouver leur résultante. Si le problème est résolu pour deux forces, il le sera pour un nombre quelconque, puisqu'il suffira de composer la première force avec la seconde, la résultante avec la troisième, et ainsi de suite jusqu'à l'épuisement des forces à composer.

Nous allons démontrer, à partir du principe des vitesses virtuelles, que deux forces appliquées au même point et représentées par deux droites, F_1 et F_2 ont une résultante représentée en grandeur et direction (*fig.* 12) par la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux forces comme côtés. Soit F une force qui ferait équilibre à F_1 et F_2; d'après le principe des vitesses virtuelles, pour un petit mouvement quelconque on aurait Travail de F_1 + Travail de F_2 + Travail de F = o. Si

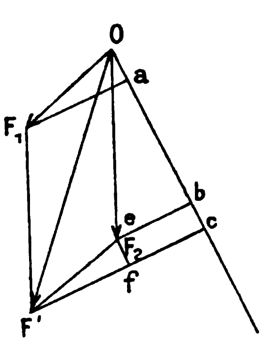


Fig. 12.

F' peut remplacer F_1 et F_2, on doit avoir équilibre entre F' et F, d'où Travail F + Travail de F' = o. D'où, enfin, en comparant les deux équations Travail de F_1 + Travail de F_2 = Travail de F'. Il suffit, d'ailleurs, de supposer le petit mouvement dans le plan des forces, parce que tout mouvement OC (*fig.* 13) oblique au plan peut être considéré comme formé d'un mouvement OD_1 normal au plan et auquel correspond un travail nul des forces, et d'un mouvement OD parallèle au plan. Soit donc OD le déplacement du point d'application, projetons les trois forces F_1, F_2 et F', sur la direction du déplacement, les forces effectives sont Oa, Ob, Oc ; les travaux correspondants sont $Oa \times OD$, $Ob \times OD$, $Oc \times OD$; et il nous suffit de prouver que :

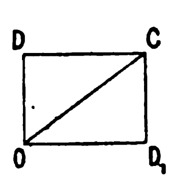


Fig. 13.

$$Oa \times OD + Ob \times OD = Oc \times OD,$$

ou, ce qui revient au même, $Oa + Ob = Oc$; ce qui est évident, puisque $Oa = ef = bc$. La ligne F' représente donc bien

en grandeur et en direction la résultante des forces F_1 et F_2.

Stevin trouva que trois forces se font équilibre lorsqu'on peut en faire un triangle ; mais il donne de cette règle, au fond identique à la précédente, une démonstration bizarre et peu concluante. C'est seulement en 1687, dans les *Principes mathématiques*, de Newton, et le projet de la *Nouvelle mécanique*, de Varignon, que le principe de la composition est pris pour base de toute la statique. A vrai dire, ces deux principes du levier et de la composition des forces se complètent l'un l'autre, et nous les retrouverons plus loin en parlant des quantités vectorielles ; il nous suffisait ici de montrer qu'ils se déduisent immédiatement et très simplement du principe fondamental du travail virtuel.

CHAPITRE IV

VITESSE ET ACCÉLÉRATION. — CHUTE DES GRAVES

I

Jusqu'à présent nous n'avons pas introduit dans nos raisonnements la notion du temps ; il faut maintenant aborder l'étude des déplacements considérés non seulement par rapport à l'espace, mais aussi par rapport à la durée. Nous ferons d'abord abstraction des forces qui produisent le mouvement et, par conséquent, nous exposerons les principes fondamentaux de la cinématique.

On dit qu'un mobile est animé d'un mouvement uniforme lorsqu'il parcourt des espaces égaux en des temps égaux, quelle que soit, d'ailleurs, la forme de sa trajectoire ; si alors on choisit une unité de temps, par exemple la seconde, une unité de longueur, par exemple le mètre, la vitesse est définie comme le quotient du nombre qui mesure la longueur par le nombre qui mesure le temps. Avec ces conventions, l'unité de vitesse est celle du mobile qui parcourt un mètre en une seconde. Dire qu'un rapide a 18 comme vitesse, c'est dire qu'il parcourt 18 mètres à la seconde, ou que généralement, en supposant son mouvement uniforme, le quotient du nombre qui mesure la longueur en mètres par celui qui mesure en secondes le temps employé à parcourir cette longueur est 18. De

même la vitesse du son est 340. Soit e l'espace, v la vitesse, t le temps ; on a évidemment $e = vt$: c'est l'équation du mouvement uniforme.

Le mouvement est dit varié quand l'espace parcouru dans des intervalles égaux de temps n'est pas toujours le même. Dans un tel mouvement, si l'on divise l'espace total parcouru par le temps employé à le parcourir, on obtient une vitesse moyenne qui ne donne aucun renseignement précis sur le mouvement du mobile à chaque instant. Savoir qu'un train fait moyennement 60 kilomètres à l'heure ne suffit pas pour connaître les circonstances du voyage : à quel moment le train s'arrête ; où sa vitesse est minima ; s'il s'est produit quelques troubles dans sa marche, etc. Mais il est certain que, si l'on diminue l'intervalle de temps pour lequel on mesure l'espace parcouru, par exemple si on détermine toutes les cinq minutes le chemin parcouru par le train, les renseignements sur la vitesse seront plus précis ; elle ne sera encore qu'une vitesse moyenne ; mais l'on pourra suivre de plus près les alternatives de ralentissement et d'accélération du mobile. Plus petit est l'intervalle de temps pour lequel on mesure l'espace parcouru, mieux la vitesse est déterminée. Enfin, si l'on pouvait diminuer indéfiniment l'intervalle de temps, l'espace parcouru diminuerait, lui aussi, indéfiniment, sans pourtant que généralement leur rapport cesse d'être fini ; ce rapport, que les mathématiques permettent de trouver, si la loi du mouvement est donnée algébriquement, est ce qu'on appelle la vitesse vraie à un instant donné. Bien entendu, dans la pratique, on se contente de vitesses moyennes, mais en prenant les intervalles de temps aussi petits que les conditions expérimentales le permettent.

Puisqu'un mouvement varié est celui pour lequel la vitesse n'est pas constante, celle-ci subit pendant chaque petit intervalle de temps une petite variation approximativement proportionnelle à la durée de ce petit intervalle. On dit que le mouvement est uniformément varié lorsque cette proportionnalité a lieu pour un intervalle de temps quelconque ; en d'autres termes, lorsque la vitesse varie proportionnellement au temps. Soit alors g l'accélération, c'est-à-dire la quantité dont varie la vitesse pendant chaque seconde, soit v_0 la vitesse à l'origine des temps, c'est-à-dire au moment où le pendule de l'horloge qui mesure le temps commence sa première oscillation, on a généralement $v = v_0 \pm gt$, formule qui donne la vitesse à un instant quelconque. Le mouvement est accéléré si la vitesse augmente : il faut prendre le signe $+$; retardé, si la vitesse diminue : il faut prendre le signe $-$. Remarquons que rien ne suppose une forme particulière à la trajectoire, elle peut être droite ou courbe.

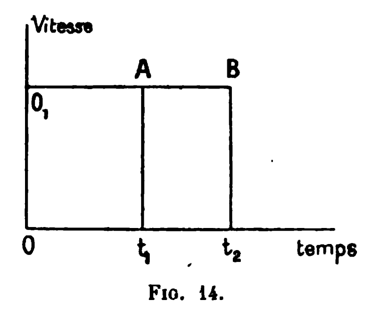


Fig. 14.

Peut-on déterminer l'espace total parcouru, si l'on connaît la vitesse à chaque instant ? Pour résoudre cette question, nous allons représenter la vitesse en fonction du temps par les procédés de la géométrie analytique inventés par Descartes. Prenons deux droites rectangulaires que nous appellerons axes de coordonnées Ot, Ov (*fig.* 14).

L'horizontale s'appelle axe des abscisses ; la verticale, axe des ordonnées. Convenons de porter sur l'axe des temps, à partir du point O, des longueurs comprenant par

exemple autant de millimètres qu'il s'est écoulé de secondes depuis l'origine des temps, et sur l'axe des vitesses des longueurs d'autant de millimètres que la vitesse renferme d'unités. Par les points t_1 et v_1 menons des droites parallèles aux axes ; le point A ainsi obtenu nous apprend qu'au temps t_1 la vitesse est v_1.

Les vitesses sont donc figurées en fonction des temps par une courbe. Dans le cas du mouvement uniforme, pour lequel la vitesse est constante, cette courbe se réduit à une droite parallèle à l'axe des temps. Pour le temps t_2, par exemple, la vitesse est figurée par la droite t_2B. Or l'espace parcouru dans le mouvement uniforme est le produit de la vitesse par la durée du mouvement, c'est-à-dire entre les temps t_2 et t_1, par la différence $Ot_2 — Ot_1$ multipliée par la vitesse t_1A ou t_2B; l'espace parcouru est donc mesuré en mètres par le même nombre que l'aire du rectangle ABt_2t_1 en millimètres carrés. Le théorème est général : il est clair d'abord que, si la vitesse variait brusquement, puis restait constante pendant un certain temps pour varier de nouveau brusquement, la courbe figurative des vitesses serait analogue (*fig.* 15) à la courbe ABB$_1$CC$_1$DD$_1$E, et l'espace parcouru serait bien représenté par l'aire MABB$_1$...EN. On démontre rigoureusement par le calcul intégral que le même résultat subsiste si la courbe est continue. D'où ce théorème fort important : On peut toujours trouver l'espace parcouru par un mobile dont on connaît à chaque instant la vitesse; et

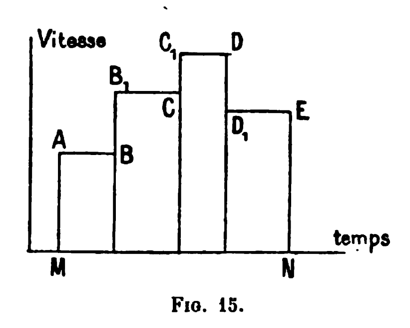


Fig. 15.

le problème revient à trouver l'aire enveloppée par une courbe que l'on peut construire.

Appliquons ce théorème au cas particulier du mouvement uniformément varié (*fig.* 16). A l'origine l'ordonnée est v_0; de plus, la courbe représentative des vitesses est une droite inclinée sur l'axe des temps, dirigée vers le haut ou le bas, suivant que le mouvement est accéléré ou retardé : car les accroissements de vitesse AB, A_1B_1 doivent être proportionnels aux temps Oa, Oa_1 ou, si l'on veut, v_0A, v_0A_1. Ceci posé, pour trouver le chemin parcouru pendant le temps $t = Oa$, il faut évaluer l'aire Ov_0Ba = aire du triangle v_0AB + aire du rectangle Ov_0Aa. L'aire du triangle $v_0AB = \frac{v_0A \times AB}{2}$. Or, v_0A représente le temps t; AB, c'est l'accroissement de la vitesse dans le temps t, soit gt dans nos notations ; l'aire du triangle est donc $\frac{gt^2}{2}$. L'aire du rectangle Ov_0Aa est égale au produit de la droite $Ov_0 = v_0$, qui mesure la vitesse initiale, par la longueur Oa qui est le temps t, soit v_0t. L'espace e total parcouru a donc enfin pour expression $e = v_0t + \frac{1}{2}gt^2$, formule bien connue. En particulier, on déduit de cette loi générale les propositions suivantes :

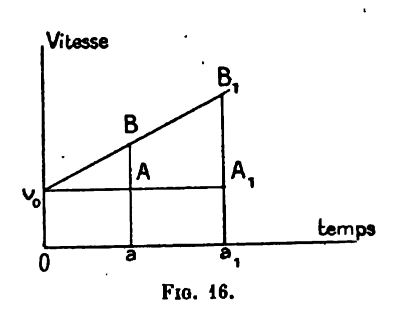


Fig. 16.

I. — Si le corps part du repos $v_0 = 0$, $e = \frac{1}{2}gt^2$, les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des

temps; si la durée du mouvement devient deux, trois, etc., fois plus grande, l'espace devient quatre, neuf, etc., fois plus grand.

II. — Les espaces parcourus dans des secondes successives sont comme les nombres de la série arithmétique 1, 3, 5, 7 : car, si nous représentons par 1 l'espace parcouru dans la première seconde, l'espace parcouru en deux secondes est 4, donc l'espace parcouru dans la deuxième est $4 - 1 = 3$. Ainsi de suite.

III. — Si, au bout d'un temps quelconque t, le mouvement devient uniforme, la vitesse restant ce qu'elle est au temps t, l'espace que parcourt le mobile dans ce mouvement uniforme et pendant un nouveau t est double de l'espace qu'il avait parcouru dans le mouvement varié. En effet, dans le mouvement varié, il parcourt en un temps t un espace $e = \frac{1}{2} gt^2$; alors sa vitesse est devenue $v = gt$; dans un mouvement uniforme, avec cette vitesse et pendant un nouveau temps t, il parcourt, d'après la formule générale des mouvements uniformes, un espace $v \times t = gt^2$, précisément double du premier.

Toutes ces propositions purement mathématiques ont été démontrées par Galilée en suivant une marche peu différente.

II

Ces préliminaires posés, étudions les lois de la chute des corps.

Tous les corps, tant les grands que les petits, les solides et les fluides, descendent avec la même vitesse dans le vide, ce mot ne faisant qu'indiquer que l'espace a été privé d'air et ne préjugeant rien d'une importante question que nous aurons plus tard l'occasion d'approfondir. Cette vérité, soupçonnée par Épicure et Lucrèce, a été démontrée par Galilée. Il fut mis sur la voie par l'observation des lustres du dôme de Pise: ayant remarqué que, suspendus à des cordes d'égale longueur, grands et petits faisaient leurs oscillations dans le même temps, il eut l'intuition que cette oscillation était une série de descentes le long de plans inclinés, identiques pour tous les pendules, et il en conclut que les corps, grands ou petits, avaient la même vitesse de chute sur chacun de ces plans. Un raisonnement bien simple conduit d'ailleurs à ce résultat; que l'on imagine le corps divisé en fragments égaux: chaque fragment arrivera au sol en même temps que les autres; il n'y aura rien de changé si on les rapproche les uns des autreset, par conséquent, s'ils reconstituent le corps primitif. Donc, grands ou petits, les corps doivent tomber avec la même vitesse. L'expérience corrobore ces raisonnements: des boules d'or, de plomb, de cuivre et de cire lâchées du haut de la tour de Pise parvinrent en bas en même temps, et plus tard Newton, en plaçant dans un tube où il fit le vide un morceau d'or et une barbe de plume, constata la même durée de descente. Si les corps

semblent ordinairement se soustraire à cette loi, c'est à cause de la présence de l'air dont l'effet est double : car il diminue le poids des corps en vertu du principe d'Archimède sans changer leurs masses ; il frotte contre eux et ralentit encore de ce chef leur mouvement.

Reste à savoir maintenant quelle est la loi qui préside à la chute de tous les corps, loi qui est unique d'après ce qui précède. Galilée la posa *a priori:* d'après lui, le mouvement, que l'expérience la plus grossière montre ne pas être uniforme, doit être uniformément accéléré. Les raisons qu'il donne à l'appui de cette opinion sont curieuses à noter. Dans l'ouvrage intitulé *Discours sur deux sciences nouvelles*, qui parut en 1638, où il fait un exposé complet de ses découvertes, il dit avoir fixé son choix *a priori* pour le motif suivant : « Dum igitur lapidem, ex sublimi a quiete descendentem nova deinceps velocitatis acquirere incrementa animadverto, cur talia addimenta simplicissima, atque omnibus magis obvia ratione fieri non credam ? » Plus loin il ajoute : « Quod si attente inspiciamus, nullum additamentum, nullum incrementum magis simplex inveniemus, quam illud quod semper eodem modo superaddit. » On voit qu'en somme toute son argumentation se réduit à ceci : le mouvement accéléré le plus simple est celui qui est appelé uniformément accéléré ; or, les lois de la nature sont simples, donc le mouvement des graves est uniformément accéléré. Il n'y a pas d'équivoque sur le fond de sa pensée, car souvent il remplace le mot uniformément par le mot naturellement accéléré.

Le principe métaphysique de la simplicité des lois de la nature, que nous rencontrons ici pour la première fois et que nous retrouverons souvent sous d'autres formes, est digne d'une étude attentive.

Dans l'espèce, le raisonnement est facile à réfuter; car, quoi de plus naturel et de plus fondamental que le mouvement des astres. Sous tous les points de vue, il paraît plus simple que celui d'une pierre qui tombe; nous avons affaire à de véritables points, étant données leurs distances réciproques, se déplaçant dans le vide, au sens où nous avons pris ce mot plus haut; et pourtant, sans même parler des perturbations, leur mouvement n'est ni uniforme, ni uniformément accéléré, comme le montrait à la même époque (1618) Képler par l'énoncé de ses lois.

En second lieu, pourquoi, si la nature aime les lois simples, les corps ne tombent-ils pas d'un mouvement uniforme. Et, si elle admet un premier degré de complexité, pourquoi pas un second? De fait, si, au lieu de borner les expériences à la surface de la terre, on supposait d'abord le grave à quelques milliers de mètres, la loi ne serait plus vérifiée, alors même qu'on imaginerait supprimée l'atmosphère qui entoure notre globe.

Mais, abandonnons ce point de vue trop étroit et donnons à la discussion toute l'ampleur qu'elle mérite.

III

Tout d'abord que peut-on appeler simplicité d'une loi? Ce peut être d'abord la simplicité de l'expression mathématique qui la représente. Ainsi soit une masse de gaz renfermée dans un corps de pompe sur laquelle on exerce des pressions variables à l'aide d'un piston. Soit p la pression, v le volume correspondant; lorsque p augmente, v diminue; il est clair que la loi de Mariotte, qui apprend que le produit de la pression par le volume est une quan-

tité constante, $pv = C^{te}$, satisfait à cette condition d'avoir une expression simple. Mais rien n'est arbitraire comme la détermination du plus ou moins de simplicité d'une formule comme il suit de l'exemple suivant : Descartes dit, dans son *Traité de la musique*, « qu'un objet est plus aisément aperçu par les sens, dont les parties sont moins différentes entre elles, c'est-à-dire qu'entre elles il y a plus de proportion; et cette proportion doit être arithmétique et non pas géométrique, d'autant qu'en celle-là il y a moins de choses à considérer, les différences étant partout égales ». Ainsi, pour remplir l'espace entre 2 et 4, la proportion arithmétique donne 3, la proportion géométrique donne $\sqrt{8}$, et, d'après lui, la première manière est plus simple que la seconde ; ce qui est fort contestable. Mais voyons l'application : il se trouve qu'en musique l'oreille ne juge avec sûreté que des rapports, c'est-à-dire des éléments simples d'une progression géométrique ; elle n'apprécie que les accords, qui sont caractérisés par le quotient des nombres de vibrations de chacune des notes. De sorte que, pour remplir l'intervalle d'une octave dans les instruments à tempérament, au lieu d'user d'une progression arithmétique, on interpose onze termes d'une progression géométrique. On voit par cet exemple d'abord qu'il serait souvent difficile de dire si une loi mathématique est plus simple qu'une autre, et que, dans l'hypothèse même où l'une semblerait l'emporter, ce n'est pas une raison pour que la nature s'y soit conformée.

D'ailleurs, la simplicité de l'expression mathématique, qui représente une loi, dépend des algorithmes employés, c'est-à-dire de l'ensemble des symboles et des conventions, et il serait absolument faux de considérer le système de ces algorithmes comme unique. Pour ne prendre qu'un

exemple particulier, les systèmes de coordonnées sont très divers. Ou bien on peut définir un point par ses distances à deux droites données, et l'on a les coordonnées cartésiennes ; ou bien par ses distances à deux points donnés, ce sont les coordonnées bipolaires ; ou bien par sa distance à un point et par l'angle de la droite qui joint les points avec une droite fixe ; on utilise alors les coordonnées polaires, etc. etc. ; mais on peut varier encore d'une autre manière ; les coordonnées, au lieu de représenter des points, représentent des droites : ce sont les distances à un point fixe des intersections de la droite avec deux droites fixes, etc. On conçoit qu'une même courbe puisse avoir des représentations mathématiques bien différentes en complexité, suivant le système de coordonnées que l'on a choisi.

On peut présenter ces dernières considérations sous une autre forme. Une même loi a les expressions mathématiques les plus diverses, suivant les variables choisies. Par exemple, si l'on prend la pression et le volume d'une masse gazeuse, la loi de Mariotte s'énonce par la formule $pv = C^{te}$; si on prend la pression et la densité d, la même loi a pour expression $p = C^{te} \times d$. Dans la première expression se trouve une proportionnalité inverse, dans la seconde une proportionnalité directe.

Voici un exemple plus complexe. Supposons qu'on veuille exprimer la loi de dilatation d'une masse gazeuse en fonction de la température. Gay-Lussac a trouvé une expression fort simple, parce qu'il définissait la température avec un thermomètre rempli de mercure ; mais, s'il l'avait définie avec un thermomètre rempli d'eau, cette loi aurait eu une forme très compliquée. C'est une chance heureuse pour Gay-Lussac que le mercure se dilate à peu

près comme les gaz ; et, s'il a découvert la loi qui porte son nom, ce n'est pas le moins du monde, comme il le croyait, parce que les lois de la nature sont simples, mais parce que le hasard avait voulu qu'on remplît les thermomètres avec du mercure.

Ainsi, à ce premier point de vue de la simplicité de l'expression mathématique de la loi, il est difficile de classer les formules suivant leur simplicité ; ces formules elles-mêmes varient suivant les algorithmes et les variables employés, et il n'est pas nécessaire qu'on soit tombé précisément sur les variables qui donnent l'expression la plus simple. De sorte qu'il est toujours recevable qu'un savant, à qui on objecte la complexité des lois qu'il énonce, réponde : 1° qu'il les trouve simples ; 2° qu'il y a toujours moyen de les rendre mathématiquement plus simples ; 4° que, si elles ne le sont pas encore, elles le deviendront, quand on aura découvert la quantité physique à laquelle il est préférable de rapporter les faits étudiés ; dans notre exemple, un thermomètre vraiment régulier.

On peut reprendre la question par un autre bout. La plupart des lois physiques peuvent s'énoncer sous deux formes, leur forme élémentaire, c'est-à-dire s'appliquant aux derniers éléments des corps, et leur forme intégrale, déterminant la manière d'agir ou d'être des corps ou des systèmes entiers. Ainsi, soit à chercher l'action d'un circuit où passe un courant sur un autre circuit. On peut supposer trouvée la loi qui régit l'action d'un petit élément du premier circuit sur un élément du second, et de cette loi, par de pures opérations mathématiques, calculer l'action totale des deux circuits. Il peut se faire qu'une loi élémentaire simple conduise à une loi intégrale com-

pliquée, ou réciproquement. Il devient embarrassant d'appliquer le principe de la simplicité des lois de la nature.

On invoque alors la simplicité des hypothèses. Assurément elles ne doivent pas être compliquées à plaisir, quand ce ne serait que pour ne pas en introduire involontairement deux contradictoires dans une même théorie. Mais il ne faut pas non plus leur attacher plus d'importance qu'elles n'en ont. Nous avons déjà parlé de leur rôle ; montré qu'elles ne servaient que de guide à l'imagination, qu'elles conduisaient seulement vers les équations différentielles, qui représentaient les phénomènes, et en étaient la véritable explication. Dans ces conditions, il importe peu qu'elles soient simples ou compliquées.

Ainsi, de quelque manière qu'on envisage la nécessité de lois naturelles simples, on arrive toujours à des conclusions négatives.

Faisons un dernier pas, et, indépendamment des formes mathématiques sous lesquelles se présentent les lois, indépendamment des hypothèses que nous faisons sur la matière, que peut-on entendre par une loi simple ? Évidemment nous sommes tentés de mesurer cette simplicité des lois par notre facilité à les concevoir. Et, pour peu que notre analyse préliminaire des notions fondamentales que nous fournissent les sens soit complète, il faut que tout s'y ramène à des pressions, des chocs ou des travaux. De plus, nous tenons à ce que ces notions soient reliées entre elles pour tous les phénomènes, comme il nous paraît qu'elles le sont dans le monde extérieur sensible. N'est-il pas assez arbitraire de vouloir de force tout faire rentrer dans ce cadre et agit-on prudemment en se refusant à rien imaginer de différent ? Quel *tolle* s'est élevé parmi les physiciens quand Fresnel a proposé de

considérer l'éther, cet ultra-gaz, comme un solide ; n'était-ce pas là au premier chef une hypothèse compliquée, quand l'esprit imagine si bien, pour expliquer les phénomènes lumineux, de petites balles, allant, venant, rebondissant et pénétrant. A l'heure actuelle nous n'avons guère plus de moyens qu'il y a cent ans de nous représenter cet étrange fluide ; pourtant les physiciens s'y sont faits, et tous en admettent l'existence, sinon réelle, du moins possible. On peut prévoir que nous aurons de plus en plus à sacrifier ce qu'on serait porté à qualifier de bon sens ; que de plus en plus nous devrons renoncer à comprendre. Quelle signification aura la simplicité d'une loi, si ce n'est celle de l'équation différentielle qui la représente? et n'avons-nous pas vu plus haut combien est précaire la hiérarchie des formules envisagées sous cet aspect.

Nous pouvons donc conclure, non que les lois de la nature sont simples ou complexes, mais que cette simplicité n'a au fond pas de sens précis. L'argumentation *a priori* de Galilée n'est pas solide ; mais il ne s'en est pas tenu là, et c'est un de ses plus beaux titres de gloire que d'avoir démontré expérimentalement ce qu'il avait soupçonné. Car, pour faux que soit le principe que nous discutons, il faut reconnaître que dans la pratique il a été d'une fécondité admirable. Tant qu'il s'est agi de déblayer le terrain de la science, parce qu'il conduisait à des formes entre lesquelles le choix se trouvait relativement facile, il a rendu d'incontestables services. D'ailleurs, il se ramène souvent à cet autre principe, qu'il y a proportionnalité entre la cause et l'effet.

Quelquefois on l'a énoncé sous une autre forme ; on a dit qu'il y avait perfection dans les œuvres de Dieu. Comme

la simplicité des moyens est un des criterium des œuvres parfaites, en fait les deux principes se confondent. « Nous devons observer deux choses, dit Descartes, la première que nous remettions toujours devant les yeux que la puissance et la bonté de Dieu sont infinies, afin que cela nous fasse connaître que nous ne devons pas craindre de faiblir en imaginant ses ouvrages trop grands, trop beaux ou trop parfaits ; mais que nous pouvons bien manquer au contraire, si nous supposons en eux quelques bornes, ou quelques limites dont nous n'ayons aucune connaissance certaine. » Ce principe est indiscutable, en ce sens qu'on ne saurait rien y discuter. La nature n'est ni plus ni moins belle, que les corps tombent suivant une loi ou suivant une autre loi. La nature est ce qu'elle est, parfaite si l'on veut, médiocre suivant quelques-uns ; il ne nous manque qu'une chose pour la juger, un étalon de mesure pris en dehors d'elle.

IV

Excellent physicien, Galilée ne se contenta pas de pareilles raisons pour admettre que les corps, tombant en chute libre, ont un mouvement uniformément accéléré ; il jugea que seule l'expérience devait décider.

La grande difficulté expérimentale à résoudre ou à tourner consistait en ce que l'accélération des graves tombant en chute libre est considérable, $9^{m},80$ par seconde. Ils tombent donc, d'après les théorèmes démontrés au début de ce chapitre, de $4^{m},90$ dans la première seconde, et par conséquent en deux secondes de $19^{m},60$; il leur fallait moins de trois secondes pour parcourir la hauteur de la

tour de Pise. Galilée pensa à remplacer la chute libre par la chute sur un plan incliné. Mais quel est le lien des deux phénomènes? Comment conclure de l'un à l'autre?

Galilée tourna d'abord la difficulté ; il démontra par l'expérience que la vitesse acquise par un corps tombant le long d'un plan incliné est la même dans chaque plan horizontal que si la chute avait été verticale. Il suspendait

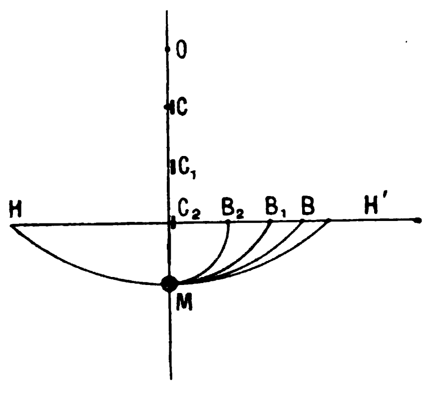


Fig. 17.

une sphère de plomb au fil OM (*fig.* 17), disposait près de la verticale du point O, et à gauche du fil, un arrêt C. Il amenait la balle jusqu'au plan horizontal HH' du côté H' en lui faisant suivre la circonférence MB de centre C; il la laissait alors tomber et constatait qu'elle atteignait vers la gauche le plan HH' en s'élevant à partir de la verticale OM suivant la circonférence MH de centre O. Il déplaçait alors l'arrêt C et lui faisait occuper les positions C_1, C_2, etc.; il recommençait l'opération. La balle M, tombant de la gauche vers la droite à partir du plan HH', décrivait dans la première moitié de l'oscillation des circonférences B_1M, B_2M, etc., des centres C_1, C_2, etc.: elle remontait toujours

dans la seconde partie suivant la circonférence MH ; l'expérience montre qu'elle atteint toujours le plan HH'.

Donc, en passant par la verticale, la vitesse du mobile était la même, qu'il descendît du plan HH' par la circonférence BM de centre C, ou la circonférence B_1M de centre C_1, etc., en un mot de quelques plans inclinés que se composât sa trajectoire. Ce qui démontre fort ingénieusement la proposition énoncée.

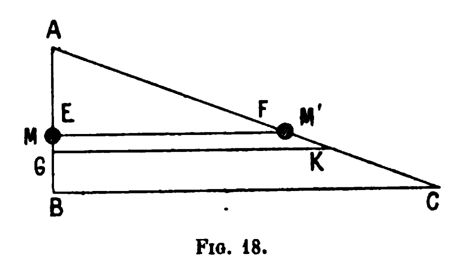


Fig. 18.

Soient maintenant deux mobiles partis sans vitesse du point A (*fig.* 18), l'un M suivant la verticale, l'autre M' suivant le plan incliné. Quand ils passent sur les plans horizontaux EF, GK, ils ont même vitesse v. Pour aller du plan EF au plan GK, très voisin, le mobile M met un temps $\theta = \frac{EG}{v}$; de même le mobile M' met un temps $\theta' = \frac{FK}{v}$, car on peut pour ce petit parcours considérer la vitesse comme uniforme.

D'où $\frac{\theta}{\theta'} = \frac{EG}{FK} =$ évidemment $\frac{AB}{AC}$. Cette relation reste vraie, quels que soient les deux plans horizontaux considérés; elle l'est donc encore pour le trajet total. La loi de chute le long d'un plan incliné est donc la même que sur la verticale, mais la durée est augmentée dans le rapport

de la longueur du plan incliné à sa hauteur. On peut donc, en le prenant presque horizontal, augmenter cette durée dans tel rapport que l'on veut.

Le plan incliné dont se servit Galilée était une rigole de 14 mètres de long, sur laquelle il avait collé du parchemin et dans laquelle glissait une bille de marbre; la hauteur de ce plan étant douze fois moindre que sa longueur, l'accélération n'était plus que de $0^m,81$, et il fallait au-delà de quatre secondes au mobile pour le parcourir.

Mais, si ingénieuse que fût la démonstration, sa signification était restreinte. et Galilée ne s'en contenta pas. En 1639, il fit faire à la question un grand pas, en remarquant que l'accélération dans la chute le long d'un plan incliné est à l'accélération verticale précisément dans le même rapport que la force qu'il faut pour soutenir un corps sur le plan incliné est au poids de ce corps; il prouva donc pour la première fois la proportionnalité des actions statiques des forces aux accélérations qu'elles expriment. Sa démonstration, qui a été conservée par le médecin Monconys dans ses *Voyages* (Paris, 1695), est basée sur la décomposition des forces.

CHAPITRE V

DÉFINITION DYNAMIQUE DE LA FORCE

I

Galilée était meilleur physicien que philosophe et plus habile à découvrir les phénomènes qu'à en trouver les raisons : il n'alla guère plus loin dans l'étude de la chute des graves que jusqu'à l'énoncé de ses lois; à la vérité, c'était un fort merveilleux résultat. Lorsque Descartes connut les expériences de Galilée, il voulut immédiatement les expliquer par quelque principe simple; l'interprétation qu'il en donna, vers 1629, lui fait le plus grand honneur.

Il énonce d'abord un principe que Galilée avait découvert et sur lequel nous aurons l'occasion de revenir, à savoir « que ce qui a une fois commencé à se mouvoir continue à se mouvoir de soi-même, sans être poussé de nouveau, jusqu'à ce qu'il en soit empêché par quelque cause extérieure et par conséquent qu'un corps se mouvrait éternellement dans le vide. Mais dans l'air il n'en est pas de même, à cause que la résistance que lui fait l'air diminue peu à peu son mouvement. » Et de cette supposition de l'inertie de la matière il tire les conséquences que voici : « Si nous supposons qu'une masse de plomb par la force de sa pesanteur tombe en bas, et que sitôt

que, au premier moment, elle a commencé à descendre, Dieu lui ôte toute sa pesanteur, en sorte que cette masse de plomb ne soit pas plus pesante que l'air, cette masse ne laissera pas pour cela de continuer à descendre dans le vide, puisqu'elle a une fois commencé à se mouvoir et qu'on ne saurait donner la raison pourquoi elle dût cesser; mais sa vitesse ne sera pas augmentée. Et, si quelque temps après Dieu vient à rendre pour un moment à cette masse de plomb la pesanteur qu'elle avait auparavant, et qu'un moment après il la lui ôte derechef, ne voit-on pas qu'en ce second moment la force de la pesanteur doit pousser autant cette masse de plomb qu'elle avait fait au premier moment, et par conséquent son mouvement sera augmenté de moitié, et le même arrivera au troisième, quatrième et cinquième moment, etc. » Donc le mouvement doit être uniformément accéléré.

Cette explication, admirablement simple, est valable d'ailleurs, que l'on imagine l'action de la pesanteur comme continue ou discontinue, puisqu'il suffit dans la première hypothèse de donner aux intervalles pendant lesquels Dieu supprime la pesanteur du corps une durée très petite comparativement aux autres.

Bientôt cependant, en 1632, Descartes fait part au Père Mersenne des doutes qui lui sont venus au sujet de cette démonstration. Avec une grande sagacité, il remarque qu'elle implique non seulement l'inertie de la matière, mais encore l'indépendance de l'action de la pesanteur sur la matière et du mouvement que celle-ci possède. « Dans ce que je vous avais autrefois mandé au sujet de la chute d'une pierre, écrit-il, je ne suppose pas seulement le vide, mais aussi que la force qui faisait mouvoir cette pierre agissait toujours également, ce qui répugne apertement

aux lois de la nature. Car toutes les puissances naturelles agissent plus ou moins, selon que le sujet est plus ou moins disposé à recevoir leur action. Et il est certain qu'une pierre n'est pas également disposée à recevoir un nouveau mouvement ou une augmentation de vitesse, lorsqu'elle se meut déjà fort vite et lorsqu'elle se meut fort lentement. »

L'objection est remarquable : bien qu'en fait Descartes se trompe dans le cas particulier de la pesanteur, ce passage est digne de la discussion la plus approfondie. La question qui se trouve ici posée est celle de la définition même de la force par ses effets dynamiques.

Mais, pour introduire quelque clarté dans les considérations qui vont suivre, il est important de revenir sur la définition que nous avons donnée des forces par les déformations qu'elles produisent, par ce que nous appellerons leurs effets statiques.

II

Ce serait une erreur de croire qu'une force ne produit de déformations que si le corps sur lequel elle agit reste au repos ; l'expérience la plus vulgaire nous apprend le contraire. Attelons un cheval à une voiture par l'intermédiaire d'un ressort ; nous constatons que, malgré la vitesse de la voiture, le ressort peut être plus ou moins bandé : au moment des plus grandes variations de vitesse, il est le plus déformé. Nous pouvons suivre ainsi, pendant le mouvement, les accroissements ou diminutions de l'effort mesuré par les déformations du ressort.

Voici un exemple plus compliqué. On sait qu'un gaz

enfermé dans un espace clos exerce une pression sur les parois du vase qui le renferme, pression mesurée par un certain nombre de grammes sur chaque centimètre carré. On dit par exemple que la pression est d'une atmosphère, si la force est de 1,033 grammes par centimètre carré. Pour mesurer cette pression, découpons dans la paroi une surface d'aire connue, et maintenons-la à sa place en appuyant dessus un ressort à boudin étalonné; soit p le nombre de grammes correspondant à la déformation du ressort : le quotient $\frac{p}{s}$ mesure la pression (*fig.*19). Pratiquement on adapte normalement à la paroi un petit corps de pompe dans lequel se meut à frottement doux un piston de section connue; la tige de ce piston passe dans l'axe du ressort à boudin, et les déplacements de son extrémité a permettent de déterminer les déformations du ressort. On peut même, si besoin est, enregistrer ces déplacements.

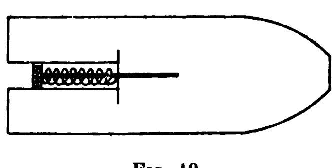


Fig. 19.

Adaptons l'appareil sur le fond d'un obus, que nous lançons à l'aide d'un canon ; au moment de la formation des gaz de la poudre, il se produit des pressions très considérables que nous pourrons enregistrer. Nous constaterons un aplatissement du ressort et par conséquent une pression statique exercée, alors même que l'obus aurait acquis des vitesses de plusieurs centaines de mètres.

Il est important de remarquer qu'il n'est en rien nécessaire que cet effet statique ou de déformation soit le même que si le corps était en repos. Il se peut, comme dit Descartes, « que les puissances naturelles agissent plus ou

moins, selon que le sujet est plus ou moins disposé à recevoir leur action ».

Étudions l'action du vent sur un disque rigide que nous supposerons normal à la direction du vent, mobile horizontalement et parallèlement à la direction du vent, et auquel nous imprimerons des vitesses variables. Pour mesurer l'effet statique du vent, découpons au centre du disque un cercle et recouvrons-le d'une membrane mince de caoutchouc dont le gonflement est proportionnel à chaque instant à la pression exercée. Nous constaterons que le gonflement est notable lorsque le disque est immobile, qu'il diminue lorsque la vitesse du disque croît, et qu'il se déplace dans le sens du vent, qu'il s'annule si la vitesse devient égale à celle du vent, et se produit en sens contraire si la vitesse dépasse celle du vent. Voici donc un effet statique variable avec la vitesse.

Soit, comme second exemple, le frottement d'un liquide sur un corps qui s'y meut, par exemple sur les flancs d'un navire. Pour le déterminer, disposons une série de volets, maintenus normaux à la carène par des ressorts, et qui seront plus ou moins tendus par le frottement du liquide. L'expérience montre que le frottement est nul si la vitesse est nulle et qu'il croît avec la vitesse.

Ainsi il serait absolument faux *a priori* de dire que l'action statique de la pesanteur est la même sur un corps, quel que soit son mouvement, sous le prétexte que le poids de ce corps au repos est le même, quelle que soit sa distance à la surface de la terre, pourvu qu'elle ne soit pas trop grande.

III

Passons à la définition dynamique des forces ; voici ce qu'on trouve à ce propos dans la *Dynamique* de d'Alembert, ouvrage célèbre paru en 1743 :

« Le mouvement uniforme des corps ne peut être altéré que par quelque cause étrangère : or, de toutes les causes soit occasionnelles, soit immédiates, qui influent dans le mouvement des corps, il n'y a tout au plus que l'impulsion seule dont nous soyons en état de déterminer l'effet par la seule connaissance de la cause. Toutes les autres causes nous sont entièrement inconnues ; elles ne peuvent par conséquent se manifester à nous que par l'effet qu'elles produisent en accélérant ou retardant le mouvement des corps, et nous ne pouvons les distinguer les unes des autres que par la loi et la quantité des variations qu'elles produisent dans le mouvement. »

On voit que d'Alembert fait bon marché de la mesure des forces par les déformations qu'elles produisent sur les corps élastiques : supposons donc, pour comprendre la suite de ses raisonnements, qu'une telle mesure soit impossible. Il continue en ces termes : « Mais la plupart des géomètres présentent comme un principe que la force est proportionnelle à l'accélération communiquée au corps sur laquelle elle agit, parce que l'accroissement de la vitesse est l'effet de la cause accélératrice et qu'un effet, selon eux, doit être proportionnel à sa cause. M. D. Bernouilli prétend que ce principe est de vérité contingente, attendu qu'ignorant la nature de la cause et la manière dont elle agit, nous ne pouvons savoir si son effet lui est

réellement proportionnel ou s'il n'est pas comme quelque puissance ou quelque fonction de cette cause. M. Euler, au contraire, s'est efforcé de prouver tout au long que ce principe est de vérité nécessaire. Pour nous, nous nous contenterons de le prendre pour définition. »

Tout ce dernier paragraphe est très subtil, mais très contestable. On ne peut empêcher d'Alembert de définir le mot force comme il lui plaît ; il paraît, en effet, bien vain de démontrer *a priori* que telle définition de mot est bien préférable à telle autre. Et du moment qu'il croyait que les seuls effets des forces étaient de produire des changements de vitesse, il avait raison de refuser le débat. De telles discussions oiseuses étaient trop nombreuses à une époque où, comme il le dit dans sa préface, « une des plus célèbres académies de l'Europe proposait le grand problème métaphysique, à savoir si les lois de la statique et de la méchanique sont de vérité contingente ou nécessaire ». Son mépris pour de tels amusements ne l'empêchait d'ailleurs pas de donner sa solution, qui est curieuse ; elle se rattache assez directement à la question actuelle pour qu'il vaille la peine de la rapporter : « Pour fixer nos idées sur cette question, dit-il, il faut d'abord la réduire au seul sens raisonnable qu'elle puisse avoir. Il ne s'agit pas de décider si l'Auteur de la nature aurait pu lui donner d'autres lois que celles que nous y observons ; dès qu'on admet un être intelligent capable d'agir sur la matière, il est évident que cet être peut à chaque instant la mouvoir et l'arrêter à son gré, ou suivant des lois uniformes, ou suivant des lois qui soient différentes pour chaque instant et pour chaque partie de matière. La question se réduit donc à savoir si les lois de l'équilibre et du mouvement qu'on observe dans la nature sont différentes

de celles que la matière abandonnée à elle-même aurait suivies. Il est de la dernière évidence qu'en se bornant à supposer l'existence de la matière et du mouvement il doit nécessairement résulter de cette double existence certains effets. Voici donc la route qu'un philosophe doit suivre pour résoudre la question dont il s'agit. Il doit tâcher d'abord de découvrir par le raisonnement quelles seraient les lois de la statique et de la méchanique dans la matière abandonnée à elle-même ; il doit examiner par l'expérience quelles sont ces lois dans l'univers ; si les unes et les autres sont différentes, il en conclura qu'elles sont de vérité contingente, puisqu'elles sont la suite d'une volonté particulière et expresse du Créateur ; si elles s'accordent, il en conclura que les lois observées sont de vérité nécessaire ; non pas en ce sens que le Créateur n'eût pu établir des lois toutes différentes, mais en ce sens qu'il n'a pas jugé à propos d'en établir d'autres que celles qui résultent de l'existence même de la matière. »

Il nous paraît difficile d'imaginer une série plus élégante de sophismes. Car il n'en résulterait pas moins la possibilité pour une même loi expérimentale d'être contingente ou nécessaire suivant la façon dont nous avons bien voulu *a priori* construire l'univers. Dans l'espèce, la loi que nous discutons est nécessaire pour d'Alembert et contingente pour Descartes. En second lieu, d'Alembert fait tenir à son auteur des choses de singuliers raisonnements. Il crée une matière sans détermination, puis il lui impose des déterminations : les lois sont contingentes ; il crée une matière immédiatement avec ses déterminations : les lois sont nécessaires ; troisième hypothèse, il crée une matière avec détermination, il lui en impose de contradictoires : pour l'honneur du Créateur, nous ad-

mettrons vaine cette troisième hypothèse. Il est toutefois bon de remarquer que, pour nous qui venons pas mal de temps après ces coups de tête de l'Auteur souverain, les deux premières sont absolument équivalentes.

Il y avait donc une réponse bien simple à faire à la plus illustre des académies de l'Europe ; et la voici : *Distinguo ;* de quelle nécessité voulait-elle parler ? Il est hors de doute que les lois de la nature ne sont pas de nécessité logique, en d'autres termes qu'il n'est pas une des formes de notre pensée d'imaginer les effets dynamiques des forces mesurés par l'accélération. Autrement, Descartes aurait toute sa vie vécu en dehors de cette nécessité-là. Il est non moins hors de doute que toutes les lois de la nature sont de nécessité réelle, en ce sens qu'il est absolument impossible de les modifier même tant soit peu, et la question tombe d'elle-même.

Puisque donc nous pouvons conclure qu'*a priori* rien n'impose, logiquement, telle définition de la force dans ses effets dynamiques plutôt que telle autre, rabattons-nous sur ces effets statiques des forces que négligeait d'Alembert, et voyons ce que l'expérience nous enseigne. Chaque fois que l'on mesure simultanément l'effet statique d'une force sur un corps en mouvement, et l'accélération qu'elle imprime en un temps donné à la masse de ce corps, on constate que ces quantités sont proportionnelles : donc il est naturel, nécessaire même, pour ne pas créer d'ambiguïté, de définir la force dynamique comme une accélération imprimée dans un temps donné à une masse donnée. Le résultat expérimental prend alors ce nouvel énoncé : « Il y a proportionnalité entre les effets statiques et dynamiques des forces. » Ce résultat, que l'expérience donne quand elle est possible, nous le généraliserons suivant la

méthode inductive et le transformerons en un principe fondamental.

Appliquons-le au cas de la chute des corps.

L'expérience montre d'abord que le mouvement de chute libre verticale est uniformément accéléré; nous en concluons: 1° par définition, que la force, mesurée par ses effets dynamiques, est constante; 2° par l'application du principe, que l'effet statique de la pesanteur est indépendant de la vitesse du corps. Descartes avait raison de dire que « toutes les puissances naturelles agissent plus ou moins, selon que le sujet est plus ou moins disposé à recevoir leur action ». Il est fort exact que généralement l'effet statique des puissances naturelles varie avec la vitesse du corps passif, mais il résulte de l'expérience que le mouvement n'est plus alors uniformément accéléré. Où Descartes se trompait (et nous verrons que tout le système des tourbillons est ici en cause), c'est lorsqu'il assimilait la pesanteur à l'entraînement d'un corps sous l'action d'un vent. La gravité est une des rares puissances naturelles dont l'effet statique soit indépendant de la vitesse du corps pesant, d'où il résulte que l'effet dynamique en est, lui aussi, indépendant. Nous affirmons, d'ailleurs, ce résultat avec toute assurance, parce qu'on peut étudier les actions de la gravité sur des corps mus avec des vitesses énormes, comme nous le verrons en étudiant l'attraction universelle.

Pour rendre clair ce point important, supposons qu'un navire sous la poussée de son hélice fasse 10 nœuds à l'heure et que le vent, dirigé dans le sens de sa course, ait une vitesse de 13 nœuds. Le vent ne pourra communiquer au navire, dans ces conditions, qu'un faible accroissement de vitesse : mais aussi les voiles resteront peu ten-

dues. Si on arrête la machine, l'action motrice du vent augmentera, mais les voiles auront des efforts statiques proportionnellement plus grands à supporter. Dans le premier cas, les circonstances de l'expérience empêchaient qu'on utilise tout le travail disponible du vent; dans le second cas, cette utilisation est plus complète.

L'expérience montre que, pour soutenir un corps au repos sur un plan incliné, il faut une force, mesurable par la déformation d'un ressort qui soit au poids du corps comme la hauteur du plan incliné est à sa longueur; d'ailleurs, Galilée a démontré que l'accélération sur le plan incliné est à l'accélération verticale dans le même rapport : l'application du principe nous permet d'affirmer que l'effet statique de la pesanteur est encore indépendant du mouvement imprimé au corps pesant.

Il ne faudrait pas croire qu'il serait impossible de démontrer ce fait expérimentalement; voici comment on s'y prendrait : Il résulte de l'application du principe que, si l'accélération est nulle, c'est-à-dire le mouvement uniforme, la force dynamique est nulle, et par conséquent aussi la force statique, ou du moins deux forces statiquement égales et opposées agissent simultanément. Ceci posé, suspendons un poids par l'intermédiaire d'un ressort à un fil enroulé sur un treuil; puis, à l'aide d'une machine quelconque, déroulons ce fil uniformément : sur le corps suspendu, dont la vitesse est constante, agissent donc des forces qui se détruisent : l'une est la pesanteur; l'autre, la traction du fil; l'une et l'autre sont mesurées par la déformation du ressort. L'expérience montrerait que cette déformation est indépendante de la vitesse de rotation du treuil.

IV

Jusqu'ici, et pour ne pas compliquer le problème, nous avons toujours admis que les forces dont nous supposions connus les effets statiques, étaient appliquées au même corps. Or, il est parfaitement évident que le même effort appliqué à des volumes de plus en plus gros d'une même substance, ne leur communique pas la même accélération : il s'agit donc maintenant d'introduire dans nos formules une grandeur mesurable qui tienne compte de la quantité de matière mise en mouvement, en d'autres termes de définir ce qu'on appelle masse des corps.

Nous empruntons à Euler (*Lettres 71-75, à une princesse d'Allemagne*) le passage suivant : « Quand un corps se trouve une fois en repos et qu'il n'y a rien en dehors qui agisse sur lui, le corps demeurera toujours en repos ; s'il commençait à se mouvoir, la cause de son mouvement serait hors de lui, de sorte qu'il n'y a rien dans le corps même qui soit capable de le mettre en mouvement. Une fois lancé, le corps ne peut continuer son mouvement que rectilignement et avec une vitesse constante, car rien n'expliquerait une modification quelconque.

« Cette propriété de conserver son état de repos ou de mouvement est ce qu'on appelle l'inertie des corps. Ce terme d'inertie a d'abord été introduit dans la philosophie par ceux qui soutenaient que tout corps avait un penchant pour le repos. Ils envisageaient les corps comme des hommes paresseux qui préfèrent le repos au travail et attribuaient aux corps une horreur pour le mouvement, semblable à celle que les hommes paresseux ont pour le

travail. Le terme d'inertie signifiait à peu près la même chose que le terme de paresse. Ce point de vue est faux. On ne saurait donc concevoir l'inertie sans une répugnance pour tout ce qui tendrait à faire changer l'état du corps; de là vient qu'on lui a donné le nom de force. Or, c'est faire mal à propos, car, si l'on comprend sous le nom de force tout ce qui est capable de changer l'état d'un corps, la qualité par laquelle les corps se conservent dans leur état est plutôt le contraire d'une force.

« Quoi qu'il en soit, cette force d'inertie est susceptible de mesure. Lorsqu'une force externe change l'état de quelque corps, l'inertie, qui voudrait le maintenir dans le même état, s'oppose à l'action de la force; on conçoit que l'inertie d'un corps puisse être plus grande ou plus petite que celle d'un autre corps. Or, les corps sont doués d'inertie en tant qu'ils renferment de la matière. C'est même de l'inertie ou de la résistance qu'ils opposent aux changements d'état que nous jugeons de la quantité de matière des corps, et de là l'inertie des corps est d'autant plus grande qu'ils contiennent plus de matière. Aussi savons-nous qu'il faut plus de force pour changer l'état d'un grand corps que d'un petit et c'est de là que nous jugeons que le grand corps contient plus de matière que le petit. On peut donc admettre que la force d'inertie est proportionnelle à la masse ou à la quantité de matière. »

On ne saurait mieux dire : il résulte de là qu'en définitive l'inertie ou la force d'inertie naît chaque fois qu'on essaye de modifier l'état d'un corps et qu'on peut lui donner comme mesure à chaque instant le produit de l'accélération par la masse.

Mais, si nous avons cité Euler, ce n'est pas qu'on ait attendu ce remarquable analyste pour préciser cette no-

tion de l'inertie de la matière, mais que nous avons cédé au plaisir de parler d'un petit livre qui, sous forme élémentaire, est profond et substantiel. C'est Newton qui a eu le mérite d'insister, le premier, sur l'expression mathématique de la force d'inertie.

« La force de la matière, dit-il dans les *Principes*, parus en 1687, est le pouvoir de résister que possède tout corps, en tant qu'il persévère dans son état de repos ou de mouvement uniforme et rectiligne. On l'appelle force d'inertie ; elle ne s'exerce que dans les changements de mouvements du corps. On la peut considérer comme une résistance ou une puissance : une puissance, en ce que le corps, en résistant à l'obstacle, s'efforce de changer l'état de cet obstacle ; une résistance, en tant que le corps s'efforce pour rester dans son état initial. » Ailleurs il assimile la force d'inertie à une force quelconque pour la manière dont elle intervient dans les équations du mouvement ; nous verrons plus loin l'importance de ce dernier aperçu.

Ceci posé, nous pouvons énoncer tous nos précédents résultats sous cette forme éminemment concrète : « Il y a équilibre à chaque instant entre les forces mesurées par leurs effets statiques et la force d'inertie. » Ce n'est là évidemment, du moins pour le moment, qu'une manière commode d'exprimer des résultats ; mais nous en tirerons dans le prochain chapitre d'intéressantes inductions sur les propriétés de cette matière, qui se trouve ici arbitrairement introduite.

V

Jusqu'ici nous n'avons traité que le cas où le mouvement est rectiligne, ce qui implique que le corps se meuve sous l'action d'une force constante en direction, parte du repos, ou que sa vitesse initiale soit dirigée suivant la direction de la force. C'est le cas d'un corps tombant du repos sous l'action de la pesanteur, ou lancé verticalement soit de haut en bas, soit de bas en haut.

Avant de résoudre le problème de la dynamique dans le cas général, cherchons avec Galilée ce qui doit se passer quand le corps, toujours soumis à une force de direction constante, reçoit, en outre, une vitesse à l'origine des temps qui n'est pas dirigée dans la direction de la force; c'est le cas d'un corps pesant lancé par la main dans une direction inclinée sur la verticale. Nous sommes amenés à aborder l'importante question de la composition des mouvements.

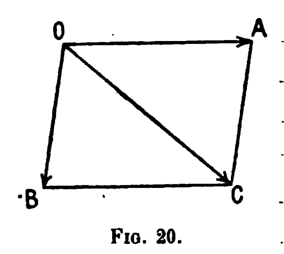


FIG. 20.

Nous pouvons d'abord considérer comme évident que, si un corps est mû à la fois, dans deux directions OA et OB (*fig.* 20), d'un mouvement uniforme et avec des vitesses proportionnelles à la longueur des droites OA et OB, il parviendra au point C, quatrième sommet du parallélogramme BOA, en suivant la diagonale OC et dans le même temps qu'il mettrait pour arriver au point A ou au point B. Cette proposition est incontestable et peut se démontrer comme suit. Imaginons que le mobile se déplace sur un

plan suivant la droite OA et avec la vitesse OA ; pendant ce temps, le plan lui-même glisse sur un plan fixe dans la direction OB avec la vitesse OB ; il est clair que, d'après l'hypothèse que les mouvements sont uniformes, le mobile par rapport au plan fixe décrira la diagonale OC.

C'est là une proposition de pure cinématique ; la question que nous avons à résoudre est plus délicate.

Tout d'abord il n'est pas vrai qu'un agent qui ferait décrire au mobile la droite OA dans un certain intervalle de temps, si ce mobile partait du repos, lui ferait encore parcourir le même espace dans le même temps, s'il possédait au commencement de l'intervalle la vitesse OB. Cela tient à ce que la force statique exercée par l'agent peut varier suivant la vitesse du mobile. Soit, par exemple, une balle qui passe à portée de notre main avec une vitesse de 7 ou 8 mètres à la seconde ; il est clair que nous sommes dans l'impossibilité d'agir dessus pour accélérer ce mouvement, parce que la vitesse que nous pouvons communiquer à notre main est certainement inférieure.

Ce que nous admettons, ce que Galilée, sans en avoir une idée bien nette, admettait implicitement, c'est que, si dans l'état actuel de mouvement l'agent exerce sur le corps une force statique qui produirait sur le corps immobile une certaine vitesse OA, il produira sur le corps en mouvement la même vitesse OA, qui se composera avec la vitesse OB déjà possédée pour faire parcourir au corps la diagonale OC. C'est la généralisation du principe que nous avons énoncé plus haut dans le cas où la vitesse initiale OB est dans la direction de la vitesse OA, ajoutée par l'action de la force.

Ainsi, dans le cas particulier de la pesanteur où l'effet

statique est indépendant de la vitesse, la vitesse imprimée dans le sens vertical à chaque instant est constante et se compose avec la vitesse uniforme initiale, abstraction faite, bien entendu, de la résistance de l'air.

Ces principes ont été implicitement appliqués par Galilée, et ce n'est pas la moindre preuve de son génie ; car ils reviennent, dans le cas de la pesanteur, à prétendre qu'un corps tombe aussi vite, quelle que soit la vitesse horizontale qu'on lui ait imprimée, et il n'est pas rare de trouver des gens qui se refusent à admettre l'existence d'une telle loi. On en déduit que la courbe décrite par les projectiles est une parabole. Galilée négligeait l'action ralentissante de l'air, en vertu de laquelle, quelle que soit la vitesse horizontale initialement imprimée, le mobile finit toujours, au bout d'un temps assez court, par se mouvoir verticalement ; Descartes tint compte du frottement de l'air et analysa le phénomène avec sa sagacité coutumière.

Il y avait une difficulté extrême à démêler les lois de ce phénomène, et l'on se rendra mieux compte de l'importance des résultats de Galilée, en sachant qu'un des beaux titres de gloire de Tartaglia, précurseur de Galilée, et qui mourut en 1559, est d'avoir avancé que la trajectoire d'un boulet est curviligne dans toute sa longueur ; on admettait couramment alors qu'elle se compose de trois parties, l'une rectiligne, l'autre courbe et circulaire, la troisième encore rectiligne, les deux droites étant tangentes au cercle. Tartaglia découvrit aussi que la portée est maxima quand l'arme fait avec l'horizon un angle de 45°, et Galilée parvint à démontrer cette propriété en partant de ses principes.

Nous avons supposé dans ce qui précède qu'une seule

force agissait sur le corps qui possédait par hypothèse une certaine vitesse à ce moment. Le principe peut se généraliser pour un nombre quelconque de forces. La vitesse qu'elles impriment est la résultante des vitesses qu'elles imprimeraient séparément si elles conservaient les mêmes effets statiques. Ces effets statiques peuvent d'ailleurs varier avec la vitesse.

Soit, par exemple (*fig.* 21) un corps lancé horizontalement avec une vitesse OA ; tenons compte de la résistance de l'air et déterminons le point où il parviendra au bout du petit temps θ. La pesanteur, dont l'effet statique ne dépend pas de la vitesse, lui fait parcourir pendant ce temps le petit chemin OB ; mais l'air amortit son mouvement et l'accélération imprimée est ici contraire au mouvement et sensiblement dirigée suivant OA′ ; cette droite OA′ représentant l'accélération qui correspond à une force statique variable avec la vitesse et qui a dans le cas particulier, pour la vitesse OA, une valeur telle qu'elle ferait parcourir au corps en repos et pendant le temps θ un chemin OA′. Composons suivant la règle du parallélogramme les trois droites OA, OA′, OB ; nous obtiendrons un point C_1, qui est la position définitive du mobile au bout du temps θ.

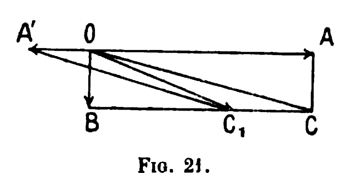


Fig. 21.

VI

Il se présente une très intéressante question ; connaissons-nous des circonstances où les forces aient des effets statiques et, par conséquent, dynamiques, indépendants des mouvements des corps entre lesquels elles s'exercent.

Pour résoudre ce problème, nous distinguerons les forces qui s'exercent sur un système de corps en forces intérieures et en forces extérieures. Les premières agissent et réagissent à la fois sur le système, de sorte qu'à chacune d'elles en correspond une autre égale et opposée ; les secondes n'ont pas leur contre-partie dans le système même, mais elles l'ont dans un autre système. Ainsi l'action du soleil sur la terre est extérieure au système formé par tous les corps terrestres ; elle est, au contraire, intérieure par rapport au système solaire tout entier.

L'expérience démontre que les forces intérieures, c'est-à-dire les actions et les réactions dans un système, sont indépendantes des mouvements de translation du système. Nous ne poùvons imprimer à des corps terrestres que des mouvements relativement lents, eu égard au mouvement qui les entraîne avec la terre. Ce mouvement peut être considéré comme composé d'une translation de plus de 30 kilomètres à la seconde et d'une rotation autour de la ligne des pôles. Mais la vitesse qui résulte de cette rotation, vitesse nulle au pôle et de 463 mètres par seconde à l'équateur, est négligeable, comme première approximation, devant la précédente. Ceci posé, « on observe, dit Laplace dans son *Exposition du système du monde*, sur la terre, qu'un corps sollicité par une force

quelconque se meut de la même manière, quel que soit l'angle que la direction de cette force fait avec la direction du mouvement commun au corps et à la partie de la surface terrestre à laquelle il répond. Une légère différence à cet égard ferait varier très sensiblement la durée des oscillations du pendule, suivant la position du plan vertical dans lequel il oscille; et l'expérience fait voir que, dans tous les plans verticaux, cette durée est exactement la même. Dans un vaisseau dont le mouvement est uniforme, un mobile soumis à l'action d'un ressort, de la pesanteur ou de toute autre force, se meut relativement aux parties du vaisseau, de la même manière, quelle que soit la vitesse du vaisseau et sa direction. On peut donc établir, comme une loi générale des mouvements terrestres, que, si dans un système de corps emportés d'un mouvement commun, on imprime à l'un d'eux une *vitesse* quelconque, son mouvement relatif ou apparent sera le même, quel que soit le mouvement général du système et l'angle que fait sa direction avec celle de la vitesse imprimée ». Tout ce qui précède est inattaquable, et, si l'on ajoute que la vitesse de translation de la terre varie d'un bout à l'autre de l'année, qu'elle est plus grande d'un trentième en hiver qu'en été, que notre estimation de cette vitesse est certainement inférieure à la vérité, puisque le système solaire est lui-même en mouvement dans l'espace, il sera évident que jamais on ne pourra avoir de cette indépendance une démonstration plus rigoureuse.

Nous ne parlons ici que du mouvement de translation, car pour le mouvement de rotation, qui n'est pas commun à tous les corps, puisqu'il est inégal pour chacun d'eux suivant sa distance à l'axe, son effet est connu et de bien

des manières : pendule de Foucault, déviation d'un corps qui tombe, d'un boulet lancé horizontalement, etc.

Nous connaissons donc toute une classe de forces, les forces intérieures, qui jouissent de cette propriété que leurs effets dynamiques et, par conséquent, statiques sont indépendants de tout mouvement commun imprimé au système. Et cette conséquence est bien nécessaire ; car, si les effets statiques sont indépendants de la vitesse, il en est de même des accélérations dynamiques absolues ; or, il suffit, pour avoir les mouvements apparents, de tenir compte de la vitesse commune au système ; mais cette vitesse, étant commune, disparaîtra pour les mouvements relatifs, qui seront identiques à ce qu'ils auraient été pour le repos du système. « Il est donc impossible, conclut Laplace, de juger du mouvement absolu d'un système dont on fait partie par les apparences qu'on y observe ; et c'est là ce qui caractérise cette loi dont l'ignorance a retardé la connaissance du vrai système du monde, par la difficulté de concevoir les mouvements relatifs des projectiles au-dessus de la surface de la terre emportée par un double mouvement de rotation sur elle-même et de révolution autour du soleil. »

Le problème est donc résolu pour les forces intérieures ; pour les forces extérieures, il n'y a pas de solution aussi absolue. Quelques-unes, comme la pesanteur, semblent avoir des effets statiques indépendants de la vitesse. Pour les attractions électriques, on a cru longtemps qu'il en était de même ; depuis peu on a démontré que la force électrique se propage avec une vitesse de 300,000 kilomètres à la seconde (vitesse de la lumière), de sorte qu'un corps qui se déplacerait dans le même sens que la force avec cette vitesse ne pourrait être rattrapé par cette force

et lui échapperait. L'effet de la force dépend donc de la vitesse du corps électrisé. Il en est de même de la force magnétique. L'expérience la plus journalière apprend que les forces résultant d'impulsions, de frottements, de chocs dépendent de la vitesse relative des corps entre lesquels elles s'exercent.

CHAPITRE VI

DES FORCES D'APRÈS LEURS EFFETS

I

Nous avons trouvé, dans le dernier chapitre, comment on peut déterminer la trajectoire d'un mobile sur lequel est supposé agir un nombre quelconque de forces disposées comme on le voudra, mais connues. Il faut maintenant résoudre le problème inverse, déterminer à quelles forces obéit un corps dont le mouvement est connu. Galilée et Descartes savaient qu'un corps ne se détourne pas de son chemin rectiligne si rien ne vient le déranger. Descartes énonce cette proposition dans ses *Principes de philosophie* (deuxième partie, art. 39) de la manière suivante : « Chaque partie de matière en son particulier ne tend jamais à continuer de se mouvoir suivant des lignes courbes, mais suivant des lignes droites, bien que plusieurs de ses parties soient souvent contraintes de se détourner parce qu'elles en rencontrent d'autres en leur chemin. Cette règle dépend de ce que Dieu est immuable et qu'il conserve le mouvement en la matière par une opération très simple; car il ne le conserve pas comme il a pu être quelque temps auparavant, mais comme il est précisément au même instant qu'il le conserve. Et, bien qu'il soit vrai que le mouvement ne se fait pas en un instant, néanmoins

il est évident que tout corps qui se meut est déterminé à se mouvoir suivant une ligne droite et non pas suivant une circulaire. Car, lorsque la pierre A (*fig.* 22) tourne dans la fronde EA, dans l'instant même qu'elle est au point A elle est déterminée à se mouvoir vers C suivant la droite AC, si l'on suppose que c'est celle-là qui touche le cercle : mais on ne saurait feindre qu'elle soit déterminée à se mouvoir circulairement parce que nous ne concevons point qu'il y ait aucune partie de cette courbure en la pierre lorsqu'elle est au point A ; et nous en sommes assurés par l'expérience, parce que cette pierre avance tout droit vers C, lorsqu'elle sort de la fronde, et ne tend en aucune façon à se mouvoir vers B. » Ce passage est excessivement important, et les trois arguments qui y sont présentés valent bien qu'on les discute.

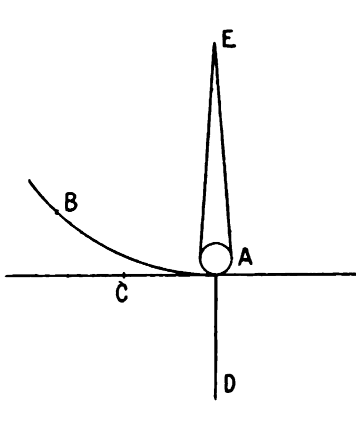


FIG. 22.

D'abord l'immuabilité ou, si l'on veut, l'immutabilité divine. Il faut convenir qu'il est singulier de baser sur l'immuabilité divine une loi qui entraîne les conséquences suivantes : si, à l'origine des choses, le centre de gravité du système sidéral a reçu un mouvement, il doit continuer éternellement à se mouvoir en ligne droite, et ne repassera jamais par le même point de l'espace ; ce qui est évidemment tout ce qu'on peut imaginer de plus opposé à une immuabilité. On répliquera que, l'espace étant infini lui-même, c'est une sphère dont le centre est partout et

la surface limite nulle part : mais qui ne voit que c'est jouer sur les mots. Car, à ce compte, si on se refuse le droit de rapporter le mouvement à quelque chose de fixe absolument, tous les mouvements sont aussi immuables les uns que les autres : bien plus, le mouvement n'existe pas. En tous cas, si un mouvement est plus en rapport avec quelque chose d'immuable, c'est le circulaire, dont la définition est plus simple et qui ramènerait les corps, au moins périodiquement, à leur position primitive.

Le second argument est un fort élégant sophisme mathématique dont Descartes donne lui-même la réfutation. Car dire qu'un mouvement est complètement déterminé à chaque instant par ce qu'il est à cet instant même, revient à considérer une courbe comme complètement déterminée en un point par sa tangente. « Il est vrai, dit Descartes, que le mouvement ne se fait pas en un instant. » En d'autres termes, c'est une pure et simple abstraction de considérer le mouvement en un point, sans tenir compte de la position antérieure du mobile à une époque aussi peu distante que l'on voudra, mais finie, du temps actuel. Or, c'est un théorème très certain de calcul différentiel qu'une courbe est complètement déterminée par un arc fini, si petit qu'il soit; car cet arc fini contient un nombre infiniment grand de points mathématiques, ce qui suffit pour que la courbe soit connue en tous ses points.

Enfin, le troisième argument consiste à dire que cela est ainsi parce que l'expérience le démontre, et nous prenons sur le fait la méthode ordinaire de Descartes. Il se figure démontrer les choses *a priori*, mais au fond il ne se montre satisfait et persuadé de ses propres arguments que lorsque ses conclusions sont vérifiées par l'expérience : en quoi il fait comme tous les physiciens passés, présents

et futurs. Nous avons eu déjà l'occasion d'insister sur ce fait. Descartes continue en ces termes : On voit « manifestement que tout corps qui est mû en rond tend sans cesse à s'éloigner du centre du cercle qu'il décrit; et nous le pouvons même sentir de la main pendant que nous faisons tourner cette pierre dans cette fronde, car elle tire et fait tendre la corde pour s'éloigner directement de notre main ». Et plus loin, dans la troisième partie, article 59, il ajoute : « Et parce que ce qui fait tendre la corde n'est autre chose que la force dont la pierre fait effort pour s'éloigner du centre autour duquel elle est mue, nous pouvons connaître par cette tension quelle est la quantité de cet effort. » Partant de là, il reconnut facilement que la force centrifuge des corps mesurée par la tension de la corde est d'autant plus grande, à égalité de vitesse[1], que le cercle est plus petit, que le corps est plus pesant et enfin qu'il tourne avec plus de vitesse. Dans toute la théorie des tourbillons il fait usage de ces propriétés sans pourtant connaître l'exacte relation qui existe entre la force, la vitesse et le rayon du cercle décrit.

Ces conséquences allaient d'elles-mêmes et, comme le fait remarquer Fontenelle dans l'*Histoire de l'Académie pour* 1700 : « Un corps souffre plus de violence et exerce plus sa force centrifuge quand il décrit un petit cercle que quand il en décrit un grand, parce qu'un grand cercle est pour ainsi dire moins cercle. »

On savait de plus, d'après Descartes, que la force centrifuge existe plus intense pour les autres courbes que pour des cercles. Car une courbe, quelle qu'elle soit, peut être regardée comme composée d'un nombre infini d'arcs de

[1] Il s'agit ici de la vitesse propre du corps, et non pas de la vitesse angulaire de rotation de la fronde.

cercle infiniment petits, tous décrits avec des rayons différents, en sorte que, dans les endroits où la courbure est plus forte, les arcs font partie de circonférences dont le rayon est plus petit. Un corps qui décrit une courbe tend donc à chaque instant, par sa force centrifuge, à s'éloigner du point qui est le centre de l'arc de cercle infiniment petit qu'il décrit alors, et cet effort est, toutes choses égales d'ailleurs, la vitesse et la masse étant les mêmes, d'autant plus grand que ce cercle est plus petit. C'est l'expression mathématique de cette force qu'il fallait trouver.

II

Ce fut en 1673, dans un appendice de quelques pages à son fameux mémoire *Horologium oscillatorium*, que Huyghens, sans les démontrer, énonça les théorèmes relatifs à la mesure des forces centrifuges et à leur comparaison avec la force de la gravité ; il les proposait comme une sorte d'énigme à résoudre par les mathématiciens. Newton, dans son non moins fameux ouvrage les *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle*, paru en 1687, donna la solution générale du problème.

Huyghens avançait que, si des cercles égaux sont décrits par des corps de même masse et avec des vitesses inégales, les forces centrifuges sont comme les carrés des vitesses : un corps dont on a doublé, triplé la vitesse possède une force centrifuge quatre fois, neuf fois plus grande. Si deux corps décrivent avec la même vitesse des circonférences inégales, les forces centrifuges sont en raison inverse des rayons ; elles décroissent quand les

rayons deviennent plus grands. En résumé, la force centrifuge d'un corps est donnée, à un facteur constant près, par la formule $\frac{v^2}{R}$, où v représente la vitesse, R le rayon : c'est-à-dire que, si, dans plusieurs cas, on calcule ce quotient, les forces centrifuges sont dans le même rapport que les résultats obtenus. Mais il ne suffit pas de calculer les rapports des forces, il faut encore les pouvoir comparer à une force connue, par exemple la pesanteur. Huyghens démontra que, si le mobile M (*fig.* 23) se meut d'un mouvement uniforme dans une circonférence qui aurait pour centre le point C et pour rayon CM avec une vitesse égale à celle qu'il aurait acquise en tombant de la hauteur PM, la force centrifuge F_c, mesurée par la tension du fil, est à la pesanteur F_p comme le double de la hauteur PM est au rayon CM.

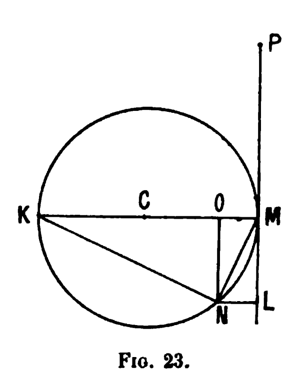


FIG. 23.

Il est intéressant de démontrer cette proposition comme exemple d'une application des principes que nous avons énoncés dans les derniers chapitres.

Rappelons les résultats fondamentaux auxquels nous sommes parvenus. La force est mesurée par l'accélération ; en d'autres termes, deux forces sont entre elles comme les vitesses qu'elles impriment à une même masse dans un temps donné. Mais, d'après ce que nous avons démontré, sous l'action d'une force constante le mouvement étant uniformément accéléré, les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps et à l'accélération imprimée dans l'unité de temps. Il résulte de là que

deux forces sont entre elles comme les espaces qu'elles font parcourir dans le même temps au même corps.

Ceci posé, prenons le mobile lorsqu'il part du point M; il arrive au point N après un temps θ. Soit v sa vitesse; si le mobile n'était pas maintenu sur le cercle, il aurait décrit pendant ce temps θ un petit espace sur la tangente $ML = v\theta$. Sous la tension du fil CM, il vient au point N, c'est donc que cette tension lui a fait parcourir pendant le temps θ la petite droite LN = MO. Or, dans le triangle MNK qui est rectangle, on a la relation :

$$\overline{MN}^2 = MO \times MK = MO \times 2R.$$

D'autre part, MN, qui est une corde, peut être confondue avec l'arc MN que le mobile a parcouru avec la vitesse uniforme v pendant le temps θ et qui a pour longueur $v\theta$. On a donc :

$$MO = \frac{\overline{MN}^2}{2R} = \frac{v^2\theta^2}{2R}.$$

Il ne reste plus qu'à trouver quelle longueur la pesanteur aurait fait parcourir au corps dans le même temps. D'après la formule démontrée, si e est cet espace, g l'accélération, on aurait $e = \frac{1}{2} g\theta^2$. Les forces sont entre elles comme les espaces, donc :

$$\frac{F_c}{F_p} = \frac{v^2\theta^2}{2R} : \frac{g\theta^2}{2} = \frac{v^2}{gR}.$$

Comme g est égal à $9^m,80$ par seconde, il suffit d'évaluer v en mètres par seconde, R en mètres pour que la formule permette de calculer le rapport cherché.

Il est facile de démontrer l'énoncé même de Huyghens.

Car, des deux formules du mouvement uniformément accéléré $v = gt$ et $h = \frac{1}{2} gt^2$, on tire aisément

$$v = \sqrt{2gh} \quad \frac{v^2}{g} = 2h.$$

h est la hauteur de chute d'un corps qui possède la vitesse v ; d'où remplaçant dans la formule :

$$\frac{Fc}{Fp} = \frac{v^2}{g} \cdot \frac{1}{R} = \frac{2h}{R} \cdot \text{ Or : } h = PM, \ R = CM.$$

La force centrifuge est bien à la pesanteur comme le double de la hauteur PM est au rayon.

Nous aurions pu parvenir au même résultat en nous appuyant sur la composition des mouvements et sur une définition plus générale de l'accélération. Nous savons (*fig.* 20) qu'une vitesse OA associée à une vitesse OB équivaut à une vitesse OC, en d'autres termes vitesse OA + vitesse OB = vitesse OC. La vitesse OB = AC est donc ce qu'il faut ajouter à la vitesse OA pour obtenir la vitesse OC : c'est, en un sens très général, la variation de la vitesse, quand celle-ci passe, en valeur et direction, de OA à OC. Soit θ le temps nécessaire à cette variation, on peut dire que $\frac{AC}{\theta}$ est l'accélération en grandeur et direction.

La définition dynamique de la force se généralise ainsi : pour modifier la vitesse OA et l'amener en un temps θ à être en grandeur et direction représentée par OC, il faut une force dirigée suivant OB ou AC et d'intensité mesurée, toutes choses égales d'ailleurs, par l'accélération

$$\frac{AC}{\theta} = \frac{OB}{\theta}.$$

Appliquons ce principe au cas d'un mouvement circulaire, uniforme, de vitesse v, sur une circonférence de rayon R (*fig.* 24). Au temps 0, le mobile est en M ; la vitesse, tangente à la trajectoire, est $MA = v$. Au temps θ, le mobile est en N, la vitesse est $NB = v$. Menons par le point N une parallèle NA′ à MA, égale en longueur à la vitesse. Par définition, l'accélération est $\frac{A'B}{\theta}$. Or, les triangles NBA′ et CMN sont semblables comme étant isocèles et ayant les angles en N et en C égaux (puisque les côtés NB et NA′ sont respectivement perpendiculaires à CN et CM comme tangentes et rayons dans un cercle). On a donc :

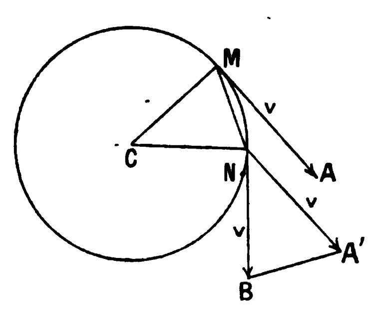


Fig. 24.

$$\frac{A'B}{\text{corde MN}} = \frac{NB}{CN} = \frac{v}{R} \qquad A'B = \text{corde MN}.\ \frac{v}{R}.$$

Or, on peut confondre la corde et l'arc, puisque rien n'empêche de prendre les points M et N très rapprochés. On a donc en divisant par θ :

$$\frac{A'B}{\theta} = \text{accélération} = \frac{\text{arc MN}}{\theta} \cdot \frac{v}{R}.$$

Mais arc MN divisé par θ, c'est l'espace parcouru divisé par le temps employé à le parcourir, c'est la vitesse v. D'où enfin accélération $= \frac{v^2}{R}$. Et, puisque les forces sont

entre elles comme les accélérations qu'elles impriment, on a, enfin, $\frac{F_c}{F_p} = \frac{v^2}{Rg}$; ce qu'il fallait démontrer.

La dynamique du point était ainsi complètement achevée avec Galilée et Huyghens, et sous ce rapport quelque admirables qu'aient été les applications faites par Newton, il n'avait rien d'essentiel à ajouter aux principes.

En effet, nous avons déjà remarqué qu'une courbe quelconque pouvait être considérée comme une suite de petits arcs de cercles dont le rayon est variable, mais connu dès que la nature de la courbe est donnée. Déterminer sous quelles forces un point décrit une courbe avec une vitesse donnée v revient donc à calculer en chaque point le rayon de courbure R de la courbe ; $\frac{v^2}{gR}$ mesure la tension qu'il a fallu exercer vers le centre pour maintenir le mobile sur la courbe, la pesanteur agissant sur le même corps étant prise pour unité. Cette force est évidemment normale à la trajectoire, puisqu'elle est dirigée suivant le rayon d'un cercle qui est tangent à la courbe au point considéré. Toutefois le mouvement du corps sur la courbe n'est pas nécessairement uniforme ; mais, quel soit-il, on le peut toujours considérer momentanément comme uniformément accéléré. Déterminons son accélération tangentielle γ, $\frac{\gamma}{g}$ sera l'expression par rapport à la pesanteur de la force qu'il faut supposer appliquée au corps tangentiellement à la trajectoire.

En définitive, la force totale nécessaire pour faire parcourir une courbe donnée avec une vitesse donnée à un corps est la résultante de deux forces : l'une, normale à la trajectoire, est représentée par $\frac{v^2}{gR}$; l'autre, tangentielle,

est représentée par $\frac{\gamma}{g}$, la force de la gravité sur le corps étant prise comme terme de comparaison.

Voilà quelles étaienf, à peu de chose près, les connaissances en dynamique au moment où Newton publia ses *Principes*, dont la majeure partie n'en est qu'une application et un développement. On conçoit, en effet, que, connaissant les orbes des planètes et leurs vitesses sur ces orbes, la détermination des forces nécessaires pour expliquer ces mouvements était une pure affaire de calcul. Il est vrai que Newton trouva de merveilleux théorèmes dont nous parlerons plus loin, généralisa la méthode par les procédés mathématiques de la première et dernière raison, et fit pour ainsi dire siennes les découvertes de ses prédécesseurs par la beauté des applications qu'il en donna.

Suivant une méthode analogue à celle qui nous a servi au chapitre précédent, nous allons exprimer ces résultats d'une autre manière. Nous avions appelé force d'inertie la résistance que le corps faisait au mouvement, et l'avions mesurée par le produit de la masse par l'accélération, c'est-à-dire l'accroissement de vitesse, et elle était évidemment dirigée en sens inverse de cette accélération. Nous pouvons étendre cette définition et, quel que soit le nombre des forces agissantes et les accélérations qu'elles impriment, appeler force d'inertie le produit de la masse par l'accélération généralisée. Ainsi dans le mouvement circulaire uniforme, la force d'inertie qui n'est autre que la force centrifuge tend à éloigner le corps du centre du cercle ; elle est mesurée à chaque instant par l'expression $\frac{mv^2}{R}$ que nous savons être le produit de l'accélération par la masse. La force qu'il faut exercer sur le corps pour le

maintenir sur le cercle est centripète, précisément égale à la force centrifuge, mais dirigée en sens inverse. Si le mouvement n'est pas uniforme, il faut concevoir que le corps résiste suivant la tangente avec une force d'inertie $m\gamma$ et que, réciproquement, pour l'amener à subir cette accélération, il faut exercer une force égale à cette force d'inertie et précisément inverse.

Donc les résultats précédents, qui résolvent complètement le problème de la dynamique du point, peuvent s'énoncer simplement en disant qu'il y a équilibre à chaque instant entre les forces mesurées par leurs effets statiques et les forces d'inertie; c'est-à-dire que les unes sont égales aux autres, mais de sens inverse. Nous allons voir tout à l'heure de quelle merveilleuse généralisation un tel énoncé est susceptible.

III

Il semble que nous soyons encore bien loin de la solution complète des problèmes de la dynamique, car un système de points contient un nombre infini de points. et la solution du problème pour un point isolé ne paraît pas être un bien important résultat. Et, pourtant, nous y touchons presque, et peu s'en est fallu qu'une intuition de génie de Newton n'y ait conduit dès 1687, dès l'apparition des *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*.

Mais n'anticipons pas, car cette intuition est restée lettre morte pendant bien des années.

Évidemment, on possédait une méthode pour étudier les systèmes des points; elle consiste à les envisager comme des points isolés reliés entre eux par des forces générale-

ment inconnues ; mais ces forces, du moins dans le cas où l'on peut aller jusqu'au bout du problème, disparaissant deux à deux comme action et réaction, s'éliminent. Cette méthode difficile, complexe, conduit dans la pratique à une mise en équation différente pour chaque cas particulier, et tout le travail est à recommencer, dès qu'on modifie quoi que ce soit dans l'énoncé. Il fallait découvrir un principe général qui permît de résoudre automatiquement, pour ainsi dire, un problème quelconque : d'Alembert eut la gloire de l'énoncer le premier. C'est la généralisation pour un système quelconque des énoncés particuliers sur les forces d'inertie.

Nous avons vu dans le cas du mouvement rectiligne que la force d'inertie fait équilibre à la force mesurée par ses effets statiques. Plus loin, et dans le cas général de la dynamique d'un point, les forces d'inertie, dont l'une est normale et centrifuge, l'autre tangentielle et dirigée en sens inverse de l'accélération tangentielle, font encore équilibre aux forces mesurées par leurs effets statiques. Mais, comme nous l'avons fait expressément remarquer, ce ne sont pas là des principes ; ce ne sont jusqu'à présent que des définitions de mots, des manières commodes d'énoncer des résultats connus d'ailleurs. D'Alembert a fait de ces énoncés un principe d'une merveilleuse fécondité.

Il admit que, dans le cas d'un système quelconque, avec des liaisons quelconques, des forces en nombre quelconque et dirigées comme on voudra, il y avait toujours équilibre entre les forces mesurées par leurs effets statiques et les forces d'inertie mesurées, comme il a été dit, par le produit des masses mues et de leur accélération, et dirigées parallèlement à l'accélération, mais en sens inverse.

On pouvait encore aller plus loin dans l'automatisme et faire de la résolution des problèmes de dynamique une simple occupation machinale, ainsi que Lagrange fit voir dans sa *Mécanique analytique* parue en 1788. Nous avons, en étudiant la statique, trouvé plusieurs méthodes pour vérifier l'équilibre entre des forces. Celle que nous avons prise comme point de départ a sur les autres l'avantage de faire abstraction de toutes les forces résultant des liaisons, forces qui ne paraissent même pas dans les équations: c'est la méthode dite du travail virtuel. Pour appliquer au contraire les autres, de la composition des forces ou du levier, on est obligé de tenir compte de ces forces de liaison généralement inconnues et de les éliminer patiemment, en utilisant leur propriété d'aller par couple de deux égales et de sens contraire, ainsi qu'il résulte du principe de l'égalité de l'action et de la réaction. Lagrange eut l'idée, qu'il développa longuement, d'écrire le principe du travail virtuel en y faisant entrer, d'une part, les forces efficaces mesurées par leurs effets statiques, de l'autre, les forces d'inertie ; ainsi se trouva-t-il en possession d'un principe absolument général dont voici l'énoncé et qui embrasse à la fois la statique et la dynamique: « Si l'on fait la somme des travaux des forces mesurées par leurs effets statiques et des forces d'inertie pour un petit déplacement compatible avec les liaisons du système à partir d'un état quelconque donné de ce système, cette somme est nulle: il y a équilibre entre les deux groupes de forces. »

Nous verrons plus tard quelle expression simple possède ce travail des forces d'inertie et comment on peut transformer cet énoncé en un autre plus métaphysique et plus concret. Sommes-nous parvenus, maintenant, au terme

de notre tâche? Toute la mécanique, toutes les explications mécaniques des sciences naturelles tenant dans cet énoncé, il semble que tout soit dit. Heureusement, il n'en est rien. Car jusqu'à présent ce principe a une forme trop précise, les quantités qui y entrent sont trop exactement définies pour qu'il renferme tous les phénomènes; et ce sera la partie la plus intéressante de notre tâche que de lui voir peu à peu perdre en compréhension ce qu'elle gagnera en extension.

IV

Nous avons dit que peu s'en est fallu que Newton ne découvrît le principe connu sous le nom de d'Alembert et sous la forme définitive que lui a donnée Lagrange.

Voici ce qu'on trouve en effet dans les *Principes mathématiques :*

« Loi III. — L'action est toujours égale à la réaction; c'est-à-dire que les actions mutuelles de deux corps sont toujours égales, mais dirigées en sens inverse. Tout ce qui tire ou presse est en même temps tiré et pressé. Si le cheval traîne la pierre attachée par un câble, le cheval est arrêté par la pierre ; car le câble tendu dans son effort pour se relâcher attire également le cheval vers la pierre et la pierre vers le cheval. Autant il empêche le mouvement de l'un, autant il accélère le mouvement de l'autre. Si un corps, agissant sur un autre corps, a modifié d'une façon quelconque son mouvement, réciproquement le mouvement du premier corps est modifié par le second d'une

égale quantité, en appelant mouvement le produit de la masse par la vitesse. »

De cette loi, énoncée d'une manière si saisissante, il déduit toute une série de corollaires que nous aurons l'occasion de retrouver et d'étudier plus au long.

« Corollaire III. — La quantité de mouvement qui s'obtient en additionnant le produit de la masse par la vitesse pour tous les corps qui se dirigent dans une direction et en retranchant le même produit pour tous les corps qui se dirigent dans la direction inverse, ne change pas par leur action mutuelle.

« Corollaire IV. — L'état de mouvement ou de repos du centre de gravité d'un système de corps agissant les uns sur les autres n'est pas modifié par leurs actions mutuelles. Si toutes les forces se réduisent à cette action mutuelle, le mouvement du centre de gravité est rectiligne et uniforme.

« Corollaire V. — Les mouvements relatifs d'un système de corps enfermés dans un espace donné ne sont pas modifiés par un mouvement uniforme de cet espace. »

Enfin, Newton donne un scolie de sa loi qui renferme le passage merveilleux auquel nous avons fait allusion. Il commence par rappeler le principe des vitesses virtuelles énoncé à la manière de Galilée :

« Les forces, dit-il, qui agissent les unes sur les autres dans les machines se soutiennent réciproquement lorsque les forces estimées dans la direction des déplacements (forces utiles) sont en raison inverse des vitesses de ces

déplacements. Cette loi se vérifie dans toutes les machines dont le but consiste seulement à diminuer la vitesse pour augmenter la force. Ainsi se trouve résolu le problème de mouvoir un poids donné avec une force donnée ou de vaincre une résistance donnée avec une force donnée. Car, si les machines sont ainsi faites que les vitesses des puissances et des résistances soient réciproques à leurs intensités, il y aura équilibre; au contraire, la puissance vaincra la résistance, si l'action de la puissance mesurée par le produit de l'intensité et de la vitesse, dépasse l'action de la résistance. Et, si cette inégalité est telle que soient vaincues et au delà les résistances qui naissent des frottements des divers organes, de la cohésion et du déplacement des poids, l'action non encore utilisée de la puissance produit dans les pièces de la machine et dans les corps résistants des accélérations. En définitive, si l'action de la cause est mesurée par le produit de son intensité estimée suivant le déplacement et de sa vitesse; si la réaction de la résistance est mesurée de même par les vitesses et les intensités des forces naissant dans ses diverses parties, des frottements, de la cohésion, du poids et des augmentations de vitesses; l'action et la réaction, dans toutes les machines, sont égales et opposées. » Qu'on remarque cette phrase: « Si æstimetur actio agentis ex ejus vi et velocitate conjunctim; et similiter resistentis reactio æstimetur conjunctim ex ejus partium singularum velocitatis et viribus resistendi ab earum attritione, cohæsione, pondere et acceleratione oriundis; erunt actio et reactio, in omni instrumentorum usu, sibi invicem semper æquales. » Il n'est pas possible d'exprimer plus nettement, plus rigoureusement le principe de d'Alembert et Lagrange. Ce n'est pas là un simple aperçu, une vue encore vague; les mots que

Newton emploie sont définis dans son introduction, ils ont bien le sens que nous leur attribuons. Le principe se trouve donc bien dans les *Principes* de Newton. Mais non seulement ce scolie était resté oublié jusqu'à Lagrange, mais encore il n'a été remis en lumière que depuis une vingtaine d'années par Tait et Thomson.

V

Parmi les applications des principes auxquels nous nous sommes élevés dans les trois derniers chapitres, nous en choisissons une à cause de son importance : c'est la démonstration de ce qu'on est convenu d'appeler le principe de la conservation des aires. Mais, pour le bien faire comprendre, quelques préliminaires sont nécessaires.

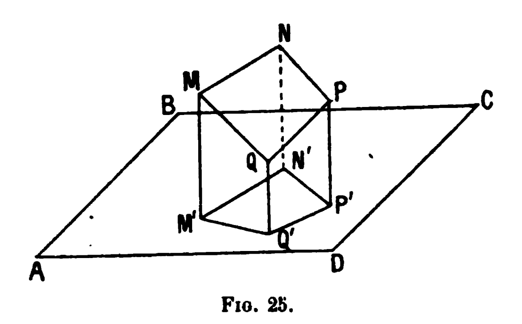


Fig. 25.

Soit un plan (*fig.* 25) ABCD et une aire quelconque plane ou courbe MNPQ, limitée par des droites ou des courbes quelconques. De tous les points de ces courbes limitatrices abaissons sur le plan des perpendiculaires ; elles coupent le plan suivant une courbe M'N'P'Q' ; l'aire comprise à l'intérieur de cette courbe est ce qu'on appelle la projection de l'aire MNPQ. Si l'on veut, c'est l'ombre portée sur le

plan en supposant que la lumière soit très éloignée suivant une direction perpendiculaire du plan.

Cela posé, voici quel est l'énoncé du principe : Lorsque plusieurs corps réagissent d'une manière quelconque les uns sur les autres, à supposer qu'il n'y ait aucune force extérieure, que tout se réduise aux forces intérieures au système, si d'un point fixe O (*fig.* 26) quelconque on mène à toutes les molécules égales ABC, dans lesquelles on peut supposer partagé le système, des droites appelées rayons vecteurs, pendant un temps quelconque *t*, les points ABC, etc.,

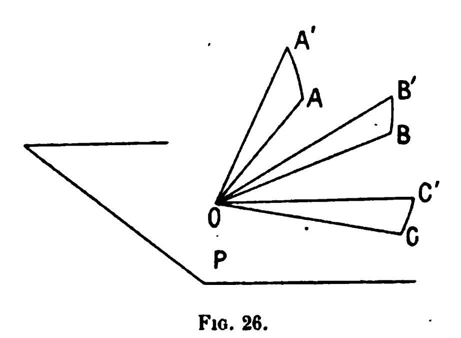


Fig. 26.

en se déplaçant, entraînent les rayons vecteurs qui balayent des aires OAA', OBB', OCC' : la somme des projections de ces aires sur un plan quelconque est proportionnelle au temps. On démontre, de plus, qu'il existe un plan P, évidemment fixe, pour lequel cette projection ou, si l'on veut, cette ombre portée est maxima. Ce qui donne une importance considérable à ce principe, c'est qu'on peut admettre que notre système solaire remplit les conditions imposées, à savoir qu'il n'y a que des forces intérieures ; car les étoiles sont trop éloignées pour agir notablement. Prenons comme point O ou foyer le centre de gravité de notre système, et cherchons le plan où la projection des

aires balayées est maxima ; ce que démontre le principe, c'est que, à quelque époque qu'on détermine la position de ce plan, aujourd'hui comme dans un million d'années, ce plan occupera rigoureusement la même situation absolue dans l'espace. Ainsi, dans un million d'années, les perturbations les plus grandes auront pu se produire, la position relative des planètes se sera certainement modifiée ; pourtant l'astronome, à supposer qu'il en existe à cette époque si éloignée, qui recalculera la position du plan invariable, aura la singulière satisfaction de se dire que cette idéale surface est restée immuable.

Poinsot, dans son très curieux mémoire sur cette question, présente, au sujet de la découverte du principe de la conservation des aires, des réflexions que nous allons lui emprunter : « Les géomètres, dit-il, ne se sont pas élevés tout d'un coup à cette loi générale. L'origine de ces idées remonte à Képler qui, le premier, imagina de considérer l'aire d'un secteur que décrit le rayon vecteur d'une planète dans son mouvement autour du soleil. Et, si l'on cherche ce qui a pu lui donner cette idée, on trouvera qu'il y parvint, non point par hasard, comme on le pourrait croire d'abord, mais par une certaine marche naturelle, qui se retrouve dans toutes les recherches et résulte pour ainsi dire de la nature même de l'esprit humain. Et, en effet, nous ne connaissons en toute lumière qu'une seule loi : c'est celle de l'uniformité et de la constance. C'est à cette idée simple que nous cherchons à réduire toutes les autres, et c'est uniquement dans cette réduction que consiste pour nous la science. Ainsi, quand nous étudions les choses qui changent pour y découvrir ce qu'on appelle la loi de leurs variations, notre unique objet est de trouver ce qu'il peut y avoir d'uniforme et de constant au milieu

de ces choses qui varient. Que si, avec le temps et par un nouvel examen, nous venons à reconnaître que les rapports qui nous avaient paru constants sont eux-mêmes variables, il nous faut faire un nouveau pas. Mais notre marche est toujours la même, car alors ce n'est plus dans ces rapports, mais dans quelque autre fourni par leur combinaison, que notre esprit va chercher cette loi de constance qui avait pour ainsi dire échappé à ses premières conclusions.

Ainsi les anciens astronomes, d'après les premières apparences des mouvements célestes, avaient cru naturellement que les planètes décrivaient dans leurs cours des cercles parfaits et qu'elles les décrivaient d'un mouvement uniforme ; de sorte que la ligne menée du centre à la planète et sa vitesse angulaire étaient considérées comme constantes. Malgré quelques irrégularités que l'observation avait rendues sensibles, cette première loi du mouvement des planètes subsista très longtemps, parce qu'on faisait à peu près disparaître ces inégalités en essayant de mieux placer le centre de ce cercle parfait qu'on avait imaginé. Mais Képler, ayant reconnu par la comparaison attentive de nombreuses observations que le mouvement d'une planète se fait, non sur un cercle, mais sur une ellipse dont le soleil occupe un des foyers, de sorte que le rayon vecteur et l'angle qu'il décrit étaient tous deux variables, et ne trouvant plus ainsi, ni dans ce rayon ni dans cet angle, cette constance qu'on y avait d'abord supposée, imagina de la retrouver dans une quantité nouvelle composée de ces deux-là ; et, considérant dans cette vue la plus simple qu'on en puisse former, savoir l'aire du secteur elliptique que trace le rayon vecteur de la planète autour du soleil, il trouva enfin que cette aire était constante, c'est-à-dire

toujours la même en temps égal, ou, en d'autres termes, que l'aire décrite était proportionnelle au temps écoulé.

Cette loi, que Képler avait prouvée par l'observation, Newton la démontra comme un théorème mathématique qui doit avoir lieu dans le mouvement de tout corps attiré par une force quelconque vers un centre fixe ; et réciproquement il fit voir que, si cette description uniforme des aires est observée dans le mouvement d'un corps, elle est une preuve de l'attraction ou de la tendance de ce corps au centre des rayons vecteurs ; ce qui conduit naturellement au principe de la pesanteur universelle. »

Rappelons la démonstration de Newton.

Soit un mobile (*fig.* 27) qui se trouve à l'origine des temps en A et animé d'une vitesse telle qu'en un petit espace de temps θ il décrit la droite AB. Son rayon vecteur OA balaye pendant ce temps l'aire du triangle OBA.

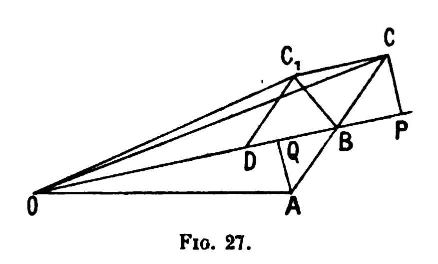


Fig. 27.

Si aucune force n'agissait sur lui, dans un nouvel espace de temps θ, il décrirait une droite CB = BA et l'aire balayée serait celle du triangle OBC. Je dis que cette aire OBC = l'aire OBA. Ce qui est évident, car ces deux triangles ont même base OB et mêmes hauteurs AQ = CP, puisque AB = BC.

La conclusion subsiste s'il existe une force quelconque, pourvu qu'elle soit dirigée vers le point fixe O. Car soit l'accélération 2BD quelconque qu'elle donnerait dans le temps θ, ou, si l'on veut, soit BD le petit espace qu'elle ferait parcourir dans le temps θ. Pour trouver le point où se trouve réellement le mobile au bout du temps θ, compo-

sons les deux espaces BC et BD, et pour cela construisons un parallélogramme sur DBC, en d'autres termes menons par C une parallèle CC_1, égale et parallèle à DB ; le mobile pendant le temps θ sous l'action de la force et de la vitesse initiale décrit donc BC_1, et son rayon vecteur balaye OBC_1. Mais les deux triangles OBC_1 et OBC sont égaux comme ayant même base et même hauteur, donc ils sont égaux. Et puisque OBC = OAB, on a aussi aire OBC_1 = aire OAB, et ainsi de suite; les espaces balayés dans des temps successifs θ égaux sont égaux. Autrement dit, les aires balayées sont proportionnelles au temps. La réciproque est évidente d'après la nature même de la démonstration.

Le cas du cercle parcouru d'un mouvement uniforme rentre dans ce théorème : les aires balayées par un rayon sont proportionnelles au temps, et la force est dirigée suivant le rayon et, par conséquent, passe par le centre. De plus, la force a pour expression $F = \frac{mv^2}{R}$ où m est la masse du corps mû, v la vitesse, et R le rayon. Soit T la durée d'une révolution entière, le chemin $2\pi R$ parcouru pendant ce temps est égal au produit du temps par la vitesse: $2\pi R = vT$, d'où $v = \frac{2\pi R}{T}$, d'où enfin :

$$F = m \cdot \frac{4\pi^2 R}{T^2} = m4\pi^2 \frac{R^3}{T^2} \frac{1}{R^2}.$$

Or, Képler a trouvé que le cube des rayons des orbes des planètes, que pour une première approximation nous pouvons confondre avec des cercles, divisé par le carré du temps employé par chaque planète à décrire son orbe, est un nombre constant: $\frac{R^3}{T^2}$ = constante. Il en résulte immédiatement que, non seulement les forces qui agissent

sur les planètes passent par un point fixe qui est le soleil, mais encore que la force qui les attire vers le soleil est en raison inverse du carré des distances : c'est la loi bien connue de la gravitation universelle. Nous avons raisonné ici sur des cercles, les mêmes conclusions s'appliquent aux ellipses, mais le calcul est un peu plus compliqué.

Vers le milieu du siècle dernier, le chevalier d'Arcy, Daniell Bernouilli et Euler découvrirent presque en même temps et sous des formes différentes, la généralisation du théorème de Newton à plusieurs corps soumis à la fois à leurs actions mutuelles et à des forces quelconques dirigées vers un même point fixe. Dans le mouvement du système autour de ce point pris comme foyer, l'aire que décrit chaque corps en particulier n'est plus constante, elle varie à chaque instant en grandeur et position par l'action perturbatrice des autres corps. Mais, en projetant toutes ces aires sur un même plan fixe et en les multipliant par les masses respectives des corps, on retrouve le théorème pour les projections, comme dans le cas d'un seul corps.

Pour appliquer le théorème au système solaire, pour faire abstraction du mouvement général qui l'emporte, pour ne considérer que les mouvements relatifs des corps qui le composent, on place le foyer, c'est-à-dire le point où passent tous les rayons vecteurs, au centre de gravité de ces corps, parce que, d'après un des corollaires de Newton, ce point est comme fixe dans l'espace où s'exécutent leurs mouvements relatifs. C'est par de telles considérations qu'on a démontré l'existence du plan invariable.

CHAPITRE VII

DE LA MATIÈRE

I

Nous sommes parvenus à construire la dynamique entière, mais nous ne savons pas encore dans quels cas elle est applicable, car nous n'avons pas encore précisé ce qu'on appelle la masse d'un corps et si tous les corps ont une masse.

Au début des *Principes mathématiques de la philosophie naturelle*, Newton pose la définition suivante : « La quantité de matière est mesurée par le produit de la densité et du volume. Si on double la densité de l'air et aussi l'espace qui le renferme, sa quantité devient quadruple : si on triple l'espace, elle devient sextuple. On doit admettre la même chose pour la neige ou les poussières qu'on a condensées par pression ou liquéfaction. De même pour tous les corps, quel que soit le procédé de condensation. Cette quantité de matière est appelée masse ou corps. Elle est rigoureusement proportionnelle aux poids, ainsi que je l'ai trouvé par des expériences précises sur les pendules. » Et en effet les lois de la chute des corps et, par conséquent, les lois qui règlent les oscillations des pendules permettent de tirer rigoureusement cette conclusion. On sait que tous les corps tombent également dans

le vide, quels que soient leur poids et leur nature; on sait de même, toujours depuis Galilée, que les pendules de même longueur ont même durée d'oscillation, malgré la diversité qu'on peut établir entre les corps qui les forment. Il résulte de là, puisque nous avons défini la force en dynamique comme le produit de la masse par l'accélération et que cette accélération est la même pour tous les corps, que les forces sont proportionnelles aux masses, et puisque les effets dynamiques des forces sont proportionnels à leurs effets statiques, il résulte aussi que les masses sont proportionnelles aux poids.

Toutefois, la pesanteur varie d'un point à l'autre de la terre, est plus grande au pôle qu'à l'équateur. Si donc on veut mesurer la masse par le poids, ou plus exactement comparer entre elles des masses par le rapport de leurs poids, il faut ou bien qu'on le fasse par l'intermédiaire d'une balance, dont les indications sont indépendantes de la valeur absolue de l'accélération, pourvu qu'elle soit la même pour tous les corps, ce qui est prouvé par l'expérience, ou bien qu'on le fasse à l'aide d'un dynamomètre, c'est-à-dire par le moyen des déformations d'un ressort, mais alors qu'on opère dans le même lieu.

Ceci posé, nous pouvons choisir une unité de masse. Elle est naturellement arbitraire; pour nous conformer aux décisions du Congrès de 1881 et à l'usage actuel, nous prendrons la masse de 1 gramme, c'est-à-dire la masse de la millième partie d'un bloc de platine conservé aux archives, nous l'appellerons gramme-masse, pour la distinguer du gramme-force. Car dans un corps il ne faut pas confondre la masse d'où provient sa force d'inertie, avec son poids qui, au contraire, imprime à cette masse une certaine accélération. Ainsi supposons un canon chargé

toujours de la même quantité de poudre et d'obus identiques. Transportons-le au pôle ou à l'équateur ; à la sortie de l'arme, l'obus possèdera toujours la même vitesse ; nous verrons plus loin que sa force de destruction sera la même ; et pourtant il n'aura pas le même poids dans les deux expériences. On peut imaginer sans absurdité un corps privé de poids et conservant une masse ; il se trouve dans la nature que certains corps ont à la fois une masse et un poids, comme il se rencontre des corps liquides transparents ; il n'y a pas *a priori* plus de nécessité à ce que tous les corps aient une masse et un poids qu'à ce que tous les liquides soient transparents.

Quoi qu'il en soit, nous choisissons aussi une unité de force ; la force de 1 gramme, s'exerçant sur la masse de 1 gramme, lui communique en une seconde une vitesse de 981 centimètres ; nous appellerons dyne la force qui communique à la masse de 1 gramme une vitesse de 1 centimètre en une seconde. La force de 1 gramme vaut donc sensiblement à Paris 981 dynes ; elle vaut plus de 981 dynes au pôle, et moins à l'équateur.

Cette loi que la pesanteur d'un corps est proportionnelle à sa masse, Newton est parvenu à la généraliser en énonçant le principe de la gravitation ou de l'attraction universelle. Tous les corps s'attirent proportionnellement à leurs masses et en raison inverse du carré de leurs distances.

Au moment où Newton posa ce principe dont les conséquences ont été si grandes pour l'astronomie, bien des hommes avaient soupçonné quelque chose de pareil, mais d'une manière si incomplète qu'il vaut autant n'en pas parler. Et, à ce propos, on peut présenter quelques remarques qui fixent la marche à tenir dans ces discussions

de priorité. On connaît l'histoire de toutes les découvertes. Un jour, un savant annonce une loi nouvelle ; il se trouve immédiatement une douzaine de gens autorisés pour la traiter de fable. Le savant persiste, impose sa manière de voir. Subitement, la douzaine hostile compulse les vieux livres et démontre qu'il n'y a eu à proprement parler rien de bien neuf, et que c'est par pure bonté qu'ils ne crient pas au plagiat. Que dire s'il se mêle encore à la discussion quelque patriotisme mal placé, ou quelque intérêt d'ordre privé. — Quand les hommes sont morts, la curiosité archéologique s'en mêle ; il est doux de renverser les idées reçues ; des gens, qui n'étaient pas les premiers venus, dépensèrent un jour 100,000 francs pour prouver par lettres soi-disant authentiques que Pascal avait découvert l'attraction universelle. C'était fort inutile, on la trouve dans Képler. — Il semble pourtant que la manière la plus sage de procéder dans ces questions doive résulter de ce fait, qu'une idée ne sert en science que si elle est énoncée avec précision. Voici ce que dit Verdet dans l'introduction aux œuvres de Fresnel : « Le véritable fondateur d'une théorie n'est pas l'alchimiste ou le scholastique chez qui on parviendra à en découvrir le premier aperçu plus ou moins explicite ; ce titre devra toujours appartenir à celui qui le premier a su tirer un corps de doctrine scientifique de ce qui n'était avant lui qu'une vague hypothèse. »

Si l'on doit insister sur des choses aussi évidentes, c'est que l'on voit bien des gens avec une sorte de rage vouloir tout retrouver chez les hommes dont ils se sont faits les biographes.

On lit dans tous les manuels que la première théorie atomique se retrouve chez les anciens ; leurs auteurs ne

se rendent pas très bien compte du brevet d'ignorance qu'ils se décernent. Rien n'est amusant comme les efforts aussi inutiles que ridicules de quelques contemporains pour retrouver dans un passé plus ou moins proche les théories de Darwin ou de Pasteur. D'ailleurs, au point de vue auquel nous nous sommes toujours placés, faisant l'histoire du développement de quelques notions et non celle des hommes, il nous est fort indifférent que ce soit celui-ci ou celui-là qui ait le premier avancé telle ou telle opinion. Que les vivants se disputent quelques bribes d'idées, on le conçoit; il faut vivre. Mais ne réveillons pas des morts inconnus. Bref, pour en revenir à la question qui nous occupe, Newton, ayant fait de la gravitation un système, en est pour nous le seul inventeur.

Dès les premières pages des *Principes*, on trouve ces remarques simples et profondes:

« Tous les corps tendent à s'écarter du centre de leur orbe, et, s'ils ne sont pas retenus par quelque force, dite centripète, qui les maintienne sur cet orbe, ils prendront un mouvement rectiligne et uniforme. Si la gravité cessait d'agir sur un projectile, sa trajectoire ne s'inclinerait pas vers la terre; il s'en irait tout droit dans les cieux, et d'un mouvement uniforme, abstraction faite de la résistance de l'air. La gravité le dérange de cette course rectiligne et l'entraîne constamment vers le sol, et cela plus ou moins suivant sa pesanteur et sa vitesse. Il dévie d'autant moins et tombe d'autant plus loin que sa vitesse est plus grande et sa pesanteur moindre. Si un globe de plomb est lancé par un canon du sommet d'une montagne avec une vitesse horizontale, et s'il atteint dans sa trajectoire courbe une distance de 2 milles avant de toucher le sol, il

tombera deux fois, dix fois plus loin avec des vitesses initiales, deux fois, dix fois plus grandes, abstraction faite de la résistance de l'air. En augmentant sa vitesse initiale, on éloignerait son point de chute, et on rendrait sa trajectoire assez rectiligne, pour qu'il tombe à 10°, à 20°, à 90°; enfin, pour qu'il fasse le tour complet de la terre, ou même pour qu'il aille dans les espaces célestes et que son mouvement se continue indéfiniment. De la même manière qu'un projectile serait maintenu dans un orbe courbe par la pesanteur, la lune peut être forcée de parcourir sa trajectoire soit par l'action de cette même pesanteur, si elle est pesante, soit par toute autre action; et, si une telle force n'existait pas, elle s'éloignerait indéfiniment en ligne droite. »

Par un tel raisonnement, Newton montrait toute la vraisemblance qu'il y avait d'attribuer à la lune une pesanteur ; car, puisque les corps restent pesants sur les plus hautes montagnes, que même leur pesanteur ne semble pas décroître d'une très notable façon, pourquoi refuser à cette pesanteur le pouvoir de se propager à une distance relativement faible de 60 rayons terrestres ?

Nous avons vu, dans un précédent chapitre, comment les lois de Képler permettaient de préciser ces idées et de démontrer que les planètes se meuvent comme attirées par un centre fixe, puisqu'elles suivent la loi des aires ; et que, de plus, la loi d'attraction est en raison inverse du carré de la distance, puisque les carrés des temps de révolution sont proportionnels aux cubes des grands axes des orbites.

Un calcul bien simple permet de vérifier la loi pour la lune. On peut admettre comme première approximation

qu'elle décrit une circonférence autour de la terre. Calculons sa force centrifuge. Elle accomplit son évolution autour de la terre en vingt-sept jours sept heures et quarante-trois minutes, soit 39343 $\times$ 60 secondes. Sa distance est 60 rayons terrestres. La longueur du cercle décrit est $2\pi.60.R$, et sa vitesse considérée comme uniforme est :

$$v = \frac{2\pi\ 60R}{39.343 \times 60} = \frac{2\pi R}{39.343}.$$

Sa force centrifuge, dont l'expression est le produit de la masse par le carré de la vitesse divisé par la distance au centre, est donc :

$$\frac{4\pi^2 R^2 m}{\overline{39.343}^2} \frac{1}{60R}.$$

Si l'on remplace les lettres par leur valeur, ce qui est facile, en se rappelant que, d'après la définition du mètre, $2\pi R = 40,000,000$ de mètres, on trouve pour la force centrifuge $m \times 0,272$. Or, l'accélération à la surface de la terre, c'est-à-dire à une distance égale à R du centre, est 980,88 ; quelle est-elle à la distance de 60 rayons en admettant la loi de l'inverse du carré des distances ? Newton démontra que l'attraction d'une sphère sur un point extérieur, à la condition que toutes les particules qui composent cette sphère attirent en raison inverse du carré des distances, est la même que si toute la masse était concentrée au centre ; donc à 60 rayons terrestres, la pesanteur doit être $\overline{60}^2$ ou 3,600 fois plus petite. Or, en divisant 980,88 par 3,600 on trouve exactement 0,272. C'est là une vérification parfaite de la loi.

II

Nous pouvons préciser et discuter les diverses suppositions qui ont été faites par Newton sur la gravitation universelle.

1° Il admet qu'elle s'exerce entre les plus petits corps, et c'est un résultat nécessaire du principe de l'action et de la réaction. Car, puisque les plus petits corps sont pesants, c'est-à-dire attirés par la masse entière de la terre, cette masse elle-même doit réciproquement en être attirée jusqu'en ses plus petites parties. Cette supposition est confirmée par les mesures des méridiens, qui ont permis de préciser la forme de la terre, de calculer *a priori* l'attraction en partant de cette forme et en admettant que les actions s'exercent entre les plus petites particules des corps. La mesure de la pesanteur par le pendule aux divers points de la terre est venue corroborer les résultats de la théorie. Ainsi la pesanteur ne saurait être assimilée à une pression qui s'exercerait à la surface des corps ; ce qui était au fond l'idée de Descartes. Le fait que les actions d'une masse ne sont en rien modifiées par l'existence des masses voisines donne au problème une simplicité relative, au moins par comparaison avec le problème des attractions électriques. On sait que la même loi de l'inverse du carré des distances régit les attractions électriques, mais que la distribution des masses électriques sur un corps est modifiée par l'existence au voisinage d'autres corps électrisés.

2° Newton suppose que les actions s'exercent en raison inverse du carré des distances, c'est-à-dire que, si les dis-

tances deviennent deux, trois, quatre fois plus grandes, les actions deviennent quatre, neuf, seize fois plus petites. Laplace, dans l'*Exposé du système du monde*, allègue comme preuve indirecte de cette loi deux arguments curieux. « Elle est, dit-il, celle de toutes les émanations qui partent d'un centre, telle que la lumière ; il paraît même que toutes les forces, dont l'action se fait apercevoir à des distances sensibles, suivent cette loi ; on a reconnu depuis peu que les attractions et les répulsions électriques et magnétiques décroissent en raison inverse du carré des distances.

Une propriété remarquable de cette loi de la nature est que, si les dimensions de tous les corps de cet univers, leurs distances mutuelles et leurs vitesses venaient à augmenter ou à diminuer proportionnellement, ils décriraient des courbes entièrement semblables à celles qu'ils décrivent, et leurs apparences seraient exactement les mêmes ; car, les forces qui les animent étant le résultat d'attractions proportionnelles aux masses, divisées par le carré de la distance, elles augmenteraient ou diminueraient proportionnellement aux dimensions du nouvel univers. On voit en même temps que cette propriété ne peut appartenir qu'à la loi de la nature. Ainsi, les apparences des mouvements de l'univers sont indépendantes de ses dimensions absolues, comme elles le sont du mouvement absolu qu'il peut avoir dans l'espace, et nous ne pouvons observer et connaître que des rapports. » La première de ces raisons ne prouve rien, car, si les analogies permettent de découvrir des lois, elles ne servent pas à les démontrer. La seconde, vraie en un sens, peut donner le change et a été quelquefois mal interprétée. Si le rayon de la terre devenait dix fois plus long, son volume devien-

drait mille fois plus grand ; l'attraction à la surface sur un corps dont le volume n'aurait pas changé serait dix fois plus grande; car la masse devient mille fois plus grande, mais son action s'exerce à une distance dix fois plus grande, ce qui diminue l'attraction au centième de sa valeur. Mais un corps à la surface aura ses dimensions dix fois plus grandes, et son volume mille fois plus grand ; bref, le poids sera devenu dix mille fois plus grand, et les déformations sur un ressort, qui ne sont proportionnelles en aucune façon au volume, auront par conséquent changé, et nous serions avertis de cette modification de notre unité de longueur. Mais ce n'est pas en ce sens qu'il faut prendre la remarque de Laplace. Les mouvements célestes ne seraient pas changés : en effet, supposons, pour simplifier, les mouvements circulaires ; la force centrifuge est $\frac{mv^2}{R}$. Si les longueurs et les vitesses deviennent dix fois plus grandes, cette force devient $\frac{1.000 \times 100}{10} = 10.000$ fois plus grande ; or, nous avons vu que l'attraction deviendrait aussi dix mille fois plus grande ; il y aura donc encore égalité. Mais nous connaissons bien d'autres lois qui ne satisfont pas à l'inverse du carré des distances, par exemple celles qui régissent les actions réciproques des courants, et, si les mouvements célestes n'étaient pas modifiés, les terrestres le seraient.

3° La proportionnalité des masses aux forces attractives est démontrée à la surface de la terre par les lois de la chute des corps et les oscillations du pendule. Elle l'est pour les planètes avec leurs satellites ou le soleil par la constance du rapport qui existe entre le carré des temps et le cube des grands axes. En effet, si on admet, pour

simplifier, des trajectoires circulaires, la force centripète a pour expression $F = m4\pi^2 \frac{R^3}{T^2} \frac{1}{R^2}$, et, puisque le rapport $\frac{R^3}{T^2}$ est le même pour toutes les planètes, il faut bien admettre que l'attraction est proportionnelle à la masse de la planète.

Et, réciproquement, cette loi admise nous permet de comparer les masses des planètes avec celle du soleil. Soit, comme exemple, à évaluer la masse du soleil par rapport à celle de la terre : il suffit d'évaluer l'attraction de la terre sur la lune, et du soleil sur la lune. Or nous avons vu qu'en une seconde l'accélération radiale imprimée à la lune par la terre est de $0^{cm},273$. Cherchons quelle est l'accélération imprimée à la terre par le soleil dans le même temps ; à la vérité, c'est l'accélération imprimée par le soleil à la lune qu'il faudrait calculer ; mais peu importe, car la chute est la même, quelle que soit la masse du corps, et par rapport au soleil la lune et la terres ont également distantes. On trouve que cette accélération est de $0^{cm},588$. Mais la lune est à peu près trois cent quatre-vingt-six fois plus rapprochée de nous que le soleil. Si elle était aussi éloignée, son accélération vers la terre serait $\overline{386}^2$ fois plus petite. En définitive, puisque les accélérations sont proportionnelles aux masses, la masse du soleil et la masse de la terre sont entre elles comme :

$$\frac{0,588 \times \overline{386}^2}{0,273} = 323.000.$$

Le soleil a trois cent vingt-trois mille fois plus de masse que la terre.

Dans le même chapitre de l'exposé du système du monde, Laplace montre très nettement les vraies raisons qui

mettent le système de Newton en dehors de toute critique. « On peut accroître, dit-il, la probabilité d'une théorie, soit en diminuant le nombre des hypothèses sur lesquelles on l'appuie, soit en augmentant le nombre des phénomènes qu'elle explique. Le principe de la pesanteur a procuré ces deux avantages à la théorie du mouvement de la terre. Comme il en est une suite nécessaire, il n'ajoute aucune supposition nouvelle à cette théorie ; mais, pour expliquer les mouvements apparents des astres, Copernic admettait dans la terre trois mouvements distincts : l'un, autour du soleil ; un autre, de révolution sur elle-même ; enfin, un troisième mouvement de ses pôles autour de ceux de l'écliptique. Le principe de la pesanteur les fait dépendre tous d'un seul mouvement imprimé à la terre, suivant une direction qui ne passe pas par son centre. En vertu de ce mouvement elle tourne autour du soleil et sur elle-même ; elle a pris une figure aplatie à ses pôles, et l'action du soleil et de la lune sur cette figure fait mouvoir lentement l'axe de la terre autour des pôles de l'écliptique. La découverte de ce principe a donc réduit au plus petit nombre possible les suppositions sur lesquelles Copernic fondait sa théorie. Elle a, d'ailleurs, l'avantage de lier cette théorie à tous les phénomènes astronomiques. Sans elle, l'ellipticité des orbes planétaires, les lois que les planètes et les comètes suivent dans leurs mouvements autour du soleil, leurs inégalités séculaires et périodiques, les nombreuses inégalités de la lune et des satellites de Jupiter, la précession des équinoxes, la nutation de l'axe terrestre, les mouvements de l'axe lunaire, enfin le flux et le reflux de la mer ne seraient que des résultats de l'observation, isolés entre eux. C'est une chose vraiment digne d'admiration que la manière dont tous ces phénomènes, qui semblent,

au premier coup d'œil, fort disparates, découlent d'une même loi qui les enchaîne au mouvement de la terre, en sorte que, ce mouvement étant une fois admis, on est conduit par une série de raisonnements géométriques à ces phénomènes. Chacun d'eux fournit une preuve de son existence et, si, l'on considère qu'il n'y en a pas un seul qui ne soit ramené à la loi de pesanteur, il n'est pas à craindre qu'elle soit démentie par quelques phénomènes jusqu'ici non observés. » Si l'on a rappelé cette longue citation, c'est qu'il est difficile de dire en meilleurs termes quelle certitude possèdent non seulement la loi de la pesanteur, mais les principes dynamiques qui ont permis d'en faire usage. Ainsi, affermis dans notre confiance à ces principes, il va nous être possible tout à l'heure de discuter plus librement les objections qu'on a pu faire et à cette loi et à ces principes.

Avant d'aborder ce sujet, ajoutons que les phénomènes astronomiques montrent que l'effet de la pesanteur agit comme si elle se communiquait en un instant; si l'on veut, que le poids statique d'une planète vers son centre d'attraction est indépendant de son mouvement. Il est clair que les deux propositions sont équivalentes. Imaginons un homme poursuivi par un autre qui court moins vite, il ne sera jamais atteint; supposons que le second court très peu plus vite et qu'en approchant du premier, il cherche à le pousser; cette poussée sera d'autant moins intense que les vitesses sont moins différentes. De même si la pesanteur mettait un temps appréciable à se transmettre, en serions-nous averti par une variation dans ses effets suivant les mouvements du corps attiré. Cette remarque corrobore ce que nous avons dit à propos de la chute des corps.

III

Arrivons maintenant aux objections qu'on a pu faire au système de la gravitation universelle. Si les masses s'attirent, a-t-on dit, et c'était là une objection évidente, deux corps quelconques, posés par exemple sur une table, devraient s'attirer et conséquemment se rapprocher. Cela est exact, mais on peut répondre que l'attraction est trop petite pour qu'il en résulte un effet mesurable. Si on parvient soit à augmenter la masse des corps, soit à supprimer

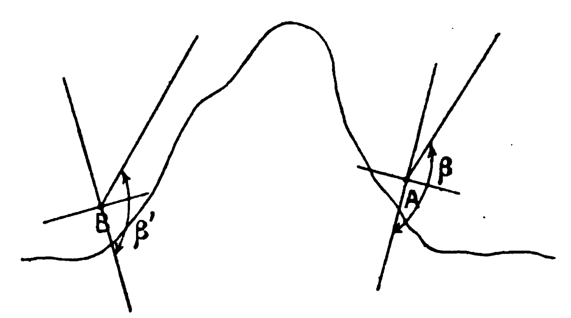


Fig. 28.

les frottements, on pourra rendre l'action visible. Newton affirmait qu'une montagne de 3 milles anglais de hauteur et de 6 milles de largeur produisait une déviation de la verticale de 1′ 15″; or, c'est là un angle déjà grand et relativement facile à mesurer. Maskelyne fit l'expérience en 1775, auprès d'une montagne d'Écosse, le mont Schéhallien, dont la forme est simple, la constitution géologique connue, et le poids approximativement calculable. Si la direction de la pesanteur ou du fil à plomb varie quand on passe de A à B (*fig.* 28) d'un côté à l'autre du mont, la surface d'un

liquide, toujours normale à cette verticale, varie, elle aussi. On opère comme pour déterminer la hauteur du pôle au-dessus de l'horizon ; on commence par placer la lunette debout, de manière à ce que, la réflexion se faisant sur une surface de mercure, l'image des fils du réticule coïncide avec eux-mêmes. L'axe optique de la lunette est alors dirigé suivant la verticale ; puis, on mesure l'angle B dont il faut tourner la lunette pour apercevoir l'étoile polaire. On faisait la mesure en A, puis en B, et on comparait les angles obtenus : l'expérience fut décisive : les angles B et B′ n'étaient pas égaux.

La seconde méthode, plus directe, consiste à supprimer les frottements. Elle fut appliquée par Cavendish à peu près à la même époque. Le principe de l'expérience est très simple. Imaginons une baguette de bois très légère AB (*fig.* 29), portant à ses extrémités deux balles métalliques et deux petites échelles d'ivoire dont les traits sont disposés verticalement. Cette baguette est suspendue à un fil CD métallique et très fin. Il est clair qu'il ne faudra exercer sur la balle A ou B perpendiculairement au plan de la figure qu'une force extrêmement petite, pour tordre le fil. Car il n'y a pour équilibrer cette force que la réaction de torsion, qui est aussi petite que l'on veut, puisqu'elle diminue beaucoup avec le diamètre du fil. Les échelles d'ivoire étaient observées avec des lunettes, et le moindre déplacement de ces échelles apparaissait nettement. Deux grosses sphères de

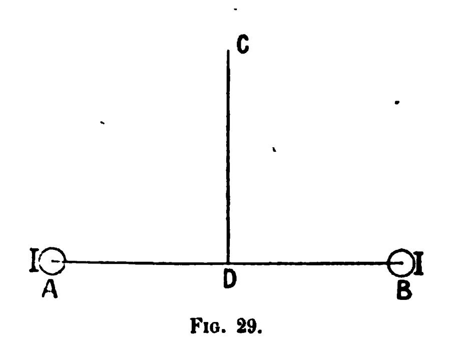


Fig. 29.

plomb A et B (*fig.* 30), pesant chacune 158 kilogrammes et portées par un arbre qui tournait autour d'un axe vertical passant par O, pouvaient prendre les deux positions AB ou A'B', par rapport au système suspendu; s'il y a une attraction appréciable, dans le premier cas on doit constater un petit mouvement suivant le sens F; dans le second, un petit mouvement suivant le sens F'. C'est, en effet, ce que l'expérience montra très nettement.

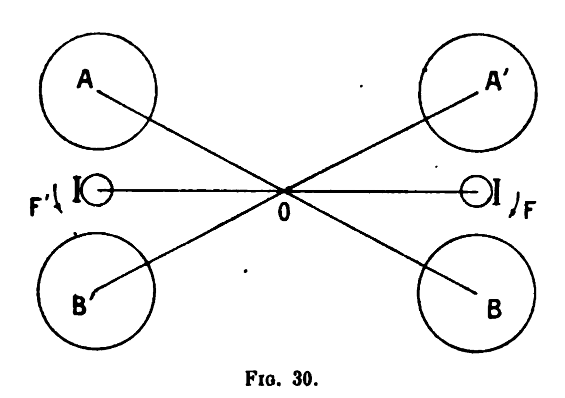


Fig. 30.

Ainsi tombe la première objection, purement scientifique, qu'on a opposée au système de l'attraction universelle. Nous discuterons les autres plus loin en même temps qu'une question connexe, la fameuse question du vide.

IV

Ce qui frappe dans la loi que nous venons d'étudier, c'est ce fait que la matière attire la matière indépendamment de sa nature chimique; un kilogramme de plomb attire un kilogramme de cuivre tout autant qu'un kilogramme de

fer. Certes, un fait pareil ne pouvait heurter l'opinion à une époque où l'on croyait à la transmutation des métaux et à l'identité intime de la matière. Il ne venait pas à l'idée d'un savant, vivant à l'époque de Descartes ou de Newton, que les différents métaux puissent être qualitativement différents, et, si les chimistes posaient l'existence de principes différents, l'air, la terre, l'eau et le feu, leurs idées étaient assez confuses pour que, sans partialité, on pût ne pas en tenir compte.

Tout au contraire, les chimistes modernes admettent des matières qualitativement distinctes ; ils considèrent comme démontrée, depuis Lavoisier, l'existence de corps simples. A ce propos je ne saurais mieux faire que de citer une page admirable de Dumas, écrite en 1859 : « Les corps réputés simples, dit-il, sont-ils des corps composés?

Peut-on conclure que leur décomposition est sur le point de se réaliser ? On peut d'abord avouer sans scrupule n'être pas convaincu que les corps simples des chimistes soient l'expression des dernières limites du pouvoir d'analyse que la science puisse prétendre à connaître jamais. Lavoisier définit la chimie la science de l'analyse. La chimie ne peut reconnaître comme simples des corps qu'elle décompose, et elle ne peut désigner sous ce nom que les corps qu'elle ne décompose pas. C'est ainsi, dit Lavoisier, que la chimie marche vers son but, en divisant, redivisant et subdivisant sans cesse. Où sera le terme de ses succès ? Nul ne saurait le dire. Ce que nous regardons comme simple n'est autre chose que le terme pratique où s'arrête la subdivision.

Lavoisier ne renonce pas à établir une distinction, qui a disparu de l'enseignement, entre les corps indécomposables ou simples de la chimie, tels qu'ils sont donnés

par l'expérience, et les éléments proprement dits. Il est aisé de voir que Lavoisier n'accordait pas aux métaux déjà si nombreux de son temps et aux corps non métalliques, indécomposables comme eux, le caractère de substances vraiment élémentaires. Soit répugnance à considérer les éléments réels des corps comme devant être nombreux, ce qui ne s'accorde guère, en effet, avec l'économie que la nature met à l'accomplissement de ses desseins, soit obéissance à des vues cachées, Lavoisier, tout en établissant l'existence de trente-deux corps indécomposables par les moyens connus de son temps et les considérant comme les corps simples relatifs de la chimie, admet aussi l'existence d'une classe de corps plus simples encore ; ce sont : la lumière, le calorique, l'oxygène, l'azote et l'hydrogène. Il n'y a donc pas lieu de confondre les corps simples, qui marquent la limite des pouvoirs de l'expérience, avec les éléments vrais du corps, éléments dont ils peuvent être séparés encore par des barrières que les forces connues ne parviennent pas à briser.

Peut-on faire un pas de plus ? Décomposer les radicaux de la chimie minérale serait une œuvre plus difficile que celle que Lavoisier eut le bonheur d'entreprendre et d'accomplir. Car ce serait mettre en évidence, non seulement des êtres nouveaux et inconnus, comme on en découvre de temps en temps, mais des êtres d'une nature nouvelle et inconnue dont notre esprit ne peut par aucune analogie se représenter les apparences et les propriétés. Ce serait porter l'analyse de la matière à un point que n'ont jamais atteint, à la connaissance de l'homme, ni les forces naturelles les plus énergiques, ni les combinaisons et les procédés de la science la plus puissante. Ce serait mettre à profit des forces que nous ignorons ou des

réactions que nul n'a imaginées. » On ne peut poser plus clairement la question; on ne saurait jusqu'à présent conclure que les métaux sont simples, puisque ce terme veut dire seulement que nous n'avons pas su les décomposer, ni qu'ils sont complexes, car nous n'avons pu les décomposer.

On a cherché la solution du problème par une voie indirecte extrêmement curieuse. On sait que les réactions de la chimie se passent toujours entre des multiples simples de certains poids qu'on appelle les équivalents ou les poids atomiques des corps. On a figurativement représenté ce fait, en admettant que ces poids sont les multiples de ceux de particules indivisibles appelées atomes. La loi prend alors cet énoncé : Quand les corps se combinent entre eux, la molécule est composée d'un petit nombre d'atomes de chacun des corps. Cette loi est établie par un nombre considérable de travaux, elle est la base de la notation chimique et de la chimie elle-même ; chaque fois qu'on l'a mise en doute, elle est sortie intacte du débat et nous la pouvons admettre sûrement, quelle que soit la réalité de son interprétation imagée. Il résulte de ces faits, à savoir que les poids atomiques représentent à un facteur numérique près le poids de l'atome, à savoir, de plus, que rien n'empêche cette propriété des molécules de contenir un nombre restreint d'atomes de s'appliquer aux atomes eux-mêmes, au cas où les matières ne seraient pas qualitativement distinctes; il résulte que, si l'on suppose l'existence d'une matière unique, les poids atomiques doivent être des multiples exacts d'un même nombre.

Certes on ne pourrait pas conclure la non-identité de la matière de la non-réalisation de cette conséquence ; mais, si cette conséquence était réalisée, ce serait un argument

singulièrement puissant à l'appui de l'hypothèse de l'identité de la matière et de la non-simplicité des corps réputés simples. En tout cas, la chose mérite discussion et bien des savants ont usé nombre d'années à l'envisager sur toutes ses faces. En particulier, Berzélius, Dumas et Stas ont fait sur ce sujet de remarquables travaux.

Berzélius était resté convaincu que les chiffres représentant les équivalents de corps simples n'avaient entre eux que des rapports fortuits, lesquels même s'évanouissaient le plus souvent à mesure que l'expérience, mieux interrogée, permettait à l'observateur de serrer de plus près les valeurs véritables de chaque équivalent. Au contraire, un chimiste anglais, le Dr Prout, signalait, il y a longtemps, une relation singulière, qui se manifeste entre ces chiffres, si disparates au premier abord, et montrait que, l'équivalent de l'hydrogène étant pris pour unité, ceux des corps simples les plus connus s'expriment généralement par des nombres entiers et même le plus souvent par des nombres peu élevés. En outre, on a reconnu que certains équivalents, ceux des corps les plus analogues par leurs propriétés, sont quelquefois égaux ou qu'ils paraissent être liés ensemble par des rapports très simples, tels que celui de 1 à 2. On a reconnu de plus que, si on considère trois corps très rapprochés les uns des autres par leurs allures chimiques, l'équivalent du corps intermédiaire paraît assez souvent représenté par la moyenne exacte des poids équivalents des deux éléments extrêmes.

Ainsi deux opinions en présence.

L'une, qui semble avoir été suivie par Berzélius, conduit à envisager les corps simples de la chimie minérale comme des être distincts, indépendants les uns des autres, dont les molécules n'ont rien de commun, sinon leur

fixité, leur immutabilité, leur éternité. Il y aurait autant de matières distinctes qu'il y a d'éléments chimiques. L'autre permet de supposer au contraire que les molécules des divers corps simples actuels pourraient bien être constituées par la condensation d'une matière unique, telle que l'hydrogène, par exemple, en acceptant comme vraie la relation observée par le Dr Prout. Celle-ci conduisait à admettre que des quantités semblables de cette matière unique pourraient, par des arrangements différents, constituer des éléments de même poids, mais doués de propriétés différentes.

Évidemment c'est à l'expérience à décider. Elle a décidé contre la loi de Prout, au moins dans son expression absolue, à savoir que les équivalents des divers corps sont des multiples de celui de l'hydrogène. Dumas, qui ne voulait pas abandonner tout ce que cette hypothèse a de séduisant, voulait prendre simplement une unité deux fois plus petite que l'équivalent de l'hydrogène. Ainsi certainement l'équivalent du chlore est voisin de 35,5, l'unité étant l'hydrogène; ce n'est pas un nombre entier. Mais, si l'on pose que l'hydrogène aura pour équivalent 2, celui du chlore devient 70, qui est un nombre entier. Et l'hypothèse de Prout modifiée revient alors à considérer l'hydrogène même comme un corps déjà composé. Il est clair que, si l'on entre dans cette voie, il n'y a pas de raison pour qu'on s'arrête ; des nombres quelconques fournis par l'expérience sont toujours entiers par rapport à une certaine quantité, car on ne les détermine qu'avec une précision nécessairement limitée. Stas a, depuis, montré qu'il faudrait prendre une unité au moins dix fois et peut-être cent fois plus petite que celle de Prout pour que l'équivalent de l'argent soit un multiple de cette unité.

Ainsi de ce côté encore la question est insoluble, et notre conclusion doit être que, jusqu'à présent du moins, rien ne saurait nous forcer à admettre l'existence de plusieurs matières spécifiquement différentes, rien ne saurait nécessiter l'hypothèse inverse.

CHAPITRE VIII

DU VIDE

I

On lit dans une lettre de Descartes au Père Mersenne, datée de 1638 : « Si vous voulez concevoir que Dieu ôte tout l'air qui est dans une chambre, sans remettre aucun autre corps à sa place, il faut par même moyen que vous conceviez que les murailles de cette chambre se viennent joindre ; ou il y aura contradiction en votre pensée. Car tout de même qu'on ne saurait imaginer qu'il anéantisse les montagnes et que, nonobstant cela, il y laisse toutes les vallées ; ainsi ne peut-on penser qu'il ôte toute sorte de corps et que nonobstant il laisse de l'espace. A cause que l'idée que nous avons du corps ou de la matière en général est comprise en celle que nous avons de l'espace, à savoir que c'est une chose qui est large, longue et profonde ; ainsi que l'idée d'une montagne est comprise en celle d'une vallée. »

Ces idées, il les reprend, il les développe et les appuie de nouvelles considérations philosophiques dans ses *Principes de philosophie* parus en 1644. C'est même à ce propos qu'il édifie sa distinction fameuse des qualités premières et secondes des corps dont nous ne disons rien de plus qu'à savoir : elle est radicalement en contradiction avec les faits. Ce qui résultera de la suite de cette étude.

Pour le moment, nous ne retiendrons du passage cité que l'affirmation qu'il n'y a pas de vide, que la matière occupe tout l'espace.

« Pour ce qui est du vide, au sens où les philosophes prennent ce mot, à savoir pour un espace où il n'y a point de substance, il est évident qu'il n'y a point d'espace en l'univers qui soit tel. »

Nous n'irons pas plus loin sans mieux poser la question. Jamais un savant ne discutera une proposition aussi générale: il refusera le débat tant qu'on n'aura pas précisé ce qu'on veut bien entendre par substance; tant qu'on n'aura pas indiqué l'expérience par laquelle la quantité de la substance sera mesurée. Il ne suffira pas de lui dire que par substance on entend ce qui est en soi et est conçu par soi, ou telle autre proposition de même nature; il demandera si la substance se pèse ou se mesure; comment elle se pèse et comment elle se mesure. C'est à cause de cette absence de définition expérimentale de la matière que les travaux de Pascal, parfaits en tant qu'étude des conditions dans lesquelles s'exerce la pression dans les fluides, ne prouvent rien sur la question même du vide.

Or, Descartes, qui est admirable savant autant que profond philosophe, ne manque pas à cette obligation imposée à tous ceux qui veulent être discutés par la science positive. On lit au paragraphe 22 de la deuxième partie des *Principes de la philosophie :* « Enfin, il n'est pas malaisé d'inférer de tout ceci que la terre et les cieux sont faits d'une même matière et que, quand même il y aurait une infinité de mondes, ils ne seraient faits que de cette matière; d'où il suit qu'il ne peut y en avoir plusieurs, à cause que nous concevons manifestement que la matière, dont la nature consiste en cela seul qu'elle est une chose

étendue, occupe maintenant tous les espaces imaginables où ces autres mondes pourraient être et que nous ne saurions découvrir en nous l'idée d'une autre matière. »

Le problème est donc posé d'une manière très nette. Est-il vrai, oui ou non, que tous les espaces imaginables soient remplis d'une matière unique, identique à celle dont sont formés les corps matériels terrestres?

Ce problème a perdu aujourd'hui de son intérêt; mais il conserve une importance historique énorme : sa solution a exigé deux siècles d'efforts, et il s'y rattache de si graves et si importantes discussions qu'il mérite une attention toute particulière.

Pour que des corps remplissent tout l'espace sans laisser d'interstices, il faut que leurs surfaces satisfassent à des conditions géométriques. Voici comment Descartes résout cette difficulté : « Je suppose premièrement que l'eau, la terre, l'air et tous les autres tels corps qui nous environnent sont composés de plusieurs petites parties de diverses figures et grosseurs, qui ne sont jamais si bien arrangées, ni si justement jointes ensemble, qu'il ne reste plusieurs intervalles autour d'elles et que ces intervalles ne sont pas vides, mais remplis de cette matière subtile, par l'entremise de laquelle j'ai dit ci-dessus que se communiquait l'action de la lumière. »

Il est maintenant facile d'expliquer à la fois ce qu'on appelle raréfaction ou condensation d'un corps et aussi en quoi les corps diffèrent les uns des autres.

« Toutes les fois qu'un corps est raréfié, dit Descartes, nous devons penser qu'il y a plusieurs intervalles entre ses parties, lesquels sont remplis de quelque autre corps, et que, lorsqu'il est condensé, ses mêmes parties sont plus proches les unes des autres qu'elles n'étaient, soit qu'on

ait rendu les intervalles qui étaient entre elles plus petits, ou qu'on les ait entièrement ôtés, auquel cas on ne saurait concevoir qu'un corps puisse être davantage condensé. Toutefois il ne laisse pas d'avoir pris tout autant d'extension que lorsque ces mêmes parties, étant éloignées les unes des autres, embrassaient un plus grand espace. »

Enfin, les corps ne diffèrent entre eux que par la forme des parties qui les composent, et on lit dans les *Météores :* « Puis, en particulier, je suppose que les petites parties dont l'eau est composée sont longues, unies et glissantes, ainsi que de petites anguilles, qui, quoiqu'elles se joignent et s'entrelacent, ne se nouent ni ne s'accrochent jamais; et au contraire que presque toutes celles, tant de la terre que même de l'air et de la plupart des autres corps, ont des figures fort irrégulières et inégales, en sorte qu'elles ne peuvent être si peu entrelacées qu'elles ne s'accrochent et se lient les unes aux autres, ainsi que font les diverses branches des arbrisseaux, etc.; elles composent alors les corps durs. Au lieu que, si elles sont simplement posées l'une sur l'autre sans être que fort peu ou point du tout entrelacées et qu'elles soient avec cela si petites qu'elles puissent être mues et séparées par l'agitation de la matière subtile qui les environne, elles doivent occuper beaucoup plus d'espace et composer des corps liquides fort rares et fort légers, comme des huiles ou de l'air. »

Voici qui est admirablement clair, et c'est un bonheur d'avoir à discuter un pareil système; il n'y a pas d'ambiguïté ni d'échappatoire possibles.

Et tout d'abord, de quelque façon que Descartes veuille expliquer la pesanteur, il est clair que la pesanteur des corps dans son système n'a pas toujours même rapport avec la matière. Car, la matière étant partout et identique

à elle-même, il n'y aurait pas de raison pour que certains corps paraissent plus ou moins pesants que d'autres. Et, avec sa bonne foi ordinaire, Descartes ne manque pas de le faire remarquer. On lit au paragraphe 25 de la quatrième partie des *Principes* : « Et il se peut faire que, bien que, par exemple, une masse d'or soit vingt fois plus pesante qu'une quantité d'eau de même grosseur, elle ne contienne pas néanmoins vingt fois plus de matière, mais quatre ou cinq fois seulement. » Nous reviendrons, d'ailleurs, sur l'explication qu'il donne de cette pesanteur.

Ainsi il n'y a pas entre la pesanteur et la quantité de matière un rapport constant, d'où l'on conclut nécessairement et avec Descartes que la pesanteur dépend non seulement de la forme des parties, mais encore du degré d'agitation et de la nature des matières subtiles qu'il imagine entre les parties des corps. D'où il résulte nécessairement que le même corps pourrait, en changeant de forme, être graduellement changé en un corps de même constitution que ceux qui pèsent moins que lui à raison de leur quantité de matière. Le poids d'un corps ne serait pas en un même lieu une constante absolue, et, puisque la plus grande modification que nous puissions imaginer dans l'état physique d'un corps est son passage de l'état solide à l'état gazeux, il doit y avoir changement de poids dans cette transformation. Comme les modifications chimiques sont plus profondes encore puisqu'elles doivent faire varier, suivant toute apparence, la structure des dernières parties des corps, la somme des poids des corps que l'on combine ne doit pas être nécessairement égale à la somme des poids des corps résultant de la réaction. Enfin, comme par la friction des parties des corps il doit, suivant Descartes lui-même, résulter

des raclures qui sont de plus en plus semblables à la matière subtile, le poids des corps doit spontanément varier.

Il semblerait que l'expérience dût trancher la question dès qu'elle fut posée : ce serait une grande erreur de le croire ; sous son apparence de simplicité, ce problème expérimental n'a été résolu qu'il y a à peine cent ans par Lavoisier, et, pour ne pas amener de la confusion, contentons-nous pour le moment d'annoncer que la solution est entièrement contraire à l'opinion de Descartes ; nous y reviendrons plus loin.

Voici une autre conséquence qui se déduit nécessairement des principes de Descartes. « Quand je conçois, dit-il, qu'un corps se meut dans un milieu qui ne l'empêche point du tout, c'est que je suppose que toutes les parties du corps liquide qui l'environne sont disposées à se mouvoir justement aussi vite que lui et non plus, tant en lui cédant leur place qu'en rentrant en celle qu'il quitte ; et ainsi il n'y a point de liqueurs qui ne soient telles qu'elles n'empêchent point certains mouvements. Mais, pour imaginer une matière qui n'empêche aucun des divers mouvements de quelques corps, il faut feindre que Dieu ou un ange agite plus ou moins ses parties, à mesure que ce corps qu'elles environnent se meut plus ou moins vite. »

Ainsi Descartes lui-même avoue qu'on ne saurait imaginer un mouvement qui ne soit pas empêché de quelque manière. Poussant son idée aussi loin que possible, il niait que, dans un espace vide d'air, les corps descendissent d'un mouvement uniformément accéléré.

Or, l'expérience montre et il n'a jamais été nié que certains milieux n'opposent au mouvement des corps qu'une résistance extrêmement petite. Le problème à résoudre

est donc le suivant: Peut-on imaginer un espace complètement plein de matière et n'opposant qu'une résistance insensible? Problème extrêmement intéressant et sur lequel il est incroyable ce qu'on a dit de choses erronées.

II

Que nous apprend la science moderne sur la résistance des milieux fluides?

Elle commence par définir ce qu'on appelle frottement intérieur.

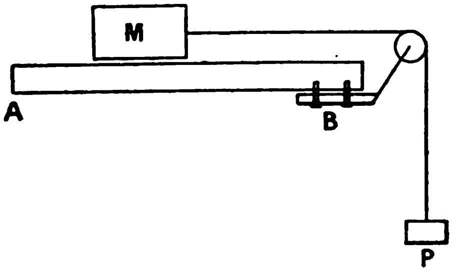


Fig. 31.

Lorsque deux corps solides frottent l'un contre l'autre, il faut, pour que leur mouvement continue indéfiniment, faire agir une force constante. Tandis que, s'il n'existe pas de frottement, une force constante produit un mouvement accéléré et une force nulle un mouvement uniforme; dès qu'il y a frottement, le mouvement cesse si une force n'équilibre pas à chaque instant la force inverse du frottement. Pour les solides le frottement est indépendant de la vitesse. Soit un corps M (*fig.* 31) se déplaçant sur un plan horizontal AB avec frottement et tiré par un poids P

égal à la force de frottement. Quelle que soit la vitesse initiale qu'on lui imprime, il la garde et son mouvement est uniforme.

Il n'en est pas de même pour les liquides ; la force de frottement varie avec la vitesse et nous la pouvons considérer comme proportionnelle à cette vitesse ; c'est-à-dire que, si deux couches liquides sont au contact et animées de vitesses différentes, il est nécessaire, pour les maintenir dans cet état, de faire agir une force d'autant plus grande que la différence des vitesses est plus grande.

Pour nous faire une idée de ces phénomènes, considérons un disque circulaire AB (*fig.* 32), horizontal et tournant dans son plan autour de l'axe vertical CD. Il est supposé mouillé par le liquide. Si le frottement n'existait pas entre les diverses couches d'un liquide, immédiatement au-dessus de la couche liquide très mince adhérente au disque, le liquide serait en repos : il n'en est pas ainsi. Cette couche adhérente frotte sur les parties voisines, les entraîne et le mouvement se transmet de proche en proche. Il résulte du frottement un travail résistant, car le point d'application des forces de frottement se déplace. Remarquons que ce frottement intérieur est tout à fait distinct de la cohésion ou de la ténacité ; il existe même dans les gaz où certes on ne peut plus parler de cohésion ou de ténacité, puisque, loin d'opposer la moindre force à une séparation, ils tendent toujours à occuper le plus grand volume possible.

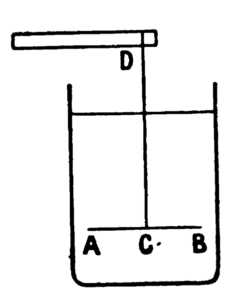


Fig. 32.

C'est le lieu de rappeler ce que nous voulons démontrer contre Descartes, à savoir que l'univers n'est pas plein

d'une matière unique, identique à celle qui forme les corps terrestres et dont la propriété fondamentale est d'avoir de la masse, c'est-à-dire de ne pas pouvoir être mue sans l'action d'une certaine force et par conséquent sans la dépense d'un certain travail.

Tout d'abord, si nous supposons que le milieu plein de Descartes a un coefficient de frottement intérieur notable, il est clair que les mouvements des astres s'arrêteront au bout d'un temps très court; car, la masse totale du monde étant infiniment grande par rapport à celle des astres, et le mouvement devant peu à peu s'égaliser, se transmettre de proche en proche, les astres doivent s'arrêter rapidement, comme le disque AB dans l'expérience dont nous avons parlé.

Descartes objecterait que, dans son système de tourbillons, la matière qui entoure les astres les entraîne et possède la même vitesse qu'eux. On répliquerait victorieusement en reportant aux tourbillons eux-mêmes ce qu'on disait des astres: ce sont ces mouvements tourbillonnaires distincts qui doivent rapidement s'égaliser, se fondre en un seul tourbillon.

Pour faire à Descartes les plus extrêmes concessions, nous admettons que les parties du milieu sont suffisamment glissantes pour que le coefficient de frottement soit nul, c'est-à-dire qu'une sorte de tube peut contenir la matière en mouvement sans que ce mouvement se communique aux parties environnantes. Soit alors un corps qui se déplace dans un tel milieu; la matière qui se trouve en avant de ce corps et qui doit passer derrière pour remplir le vide qui se formerait doit être animée d'un certain mouvement. Si le corps se déplace rectilignement et d'une manière uniforme, nous pouvons admettre

à la rigueur que, s'il doit mettre en branle les masses qui sont devant lui, en passant derrière elles lui restituent toute l'énergie qu'elles lui ont empruntée. Mais il est clair qu'une pareille compensation n'aura plus lieu si le mouvement est courbe. De plus, si ce mouvement est accéléré ou retardé, la quantité de matière mue et sa vitesse doivent varier nécessairement. Il résulte de là que, si à la rigueur on peut imaginer dans un milieu où le frottement est nul une résistance très faible pour un mouvement rectiligne et uniforme, ce n'est plus possible pour un mouvement non rectiligne et non uniforme, tant qu'on suppose que la matière est identique en tous les points de l'espace et par conséquent possède la même masse.

La forme des parties de la matière n'est pas à invoquer, puisque nous avons admis tout ce qu'il était possible sous ce rapport, en posant égal à 0 le coefficient de frottement. Le raisonnement vaut *a fortiori*, si ce coefficient n'est pas nul, puisqu'à mesure que nous le supposerons plus grand, la quantité de matière qui est entraînée par le mouvement du corps augmente et que, par conséquent, les effets de la courbure de la trajectoire ou des variations de la vitesse se font de plus en plus sentir.

Or les astres décrivent des courbes qui ne sont pas des droites, et avec un mouvement qui n'est pas uniforme ; donc, si la matière était unique et possédait par unité de volume une masse égale à celle des corps pesants, il y aurait une résistance au mouvement des astres, et par conséquent peu à peu diminution dans leurs vitesses et changement dans leurs trajectoires : phénomènes qui ne se produisent pas.

Ainsi l'hypothèse de Descartes est contradictoire avec la loi de Newton qui dit que la matière est mesurée par

la masse, et que la masse est proportionnelle au poids.

D'abord, parce qu'il résulte de la loi de Newton que, la masse d'un corps étant invariable, le poids aussi est invariable, tandis qu'il découle des principes de Descartes que le poids peut varier; ensuite, parce qu'on ne saurait imaginer le mouvement d'un corps dans un milieu plein sans une déperdition de travail ou une résistance, tandis que Descartes admet des milieux pleins sans une résistance nécessaire; enfin, parce que, même en supposant que la déperdition est compensée par un gain, le milieu extérieur, à supposer nul son frottement intérieur, a par le seul fait de sa masse une influence sur le mouvement des corps qui se meuvent dans lui, tandis que tout se passe comme si cette action n'a pas lieu. Nous avons vu combien le système de Newton est probable; nous n'hésiterons pas à lui donner gain de cause contre celui de Descartes.

III

Nous avons résolu le problème du vide, quand, dans la proposition « qu'il n'y a point d'espace où il n'y ait point de substance », le mot substance est pris au sens de Descartes. Mais le problème est bien différent si nous ne nous astreignons pas à n'admettre qu'une seule espèce de matière et nous sommes amenés à répondre à ces nouvelles questions: Existe-t-il des matières impondérables et sans masse? Comment faut-il envisager leur rôle au cas où elles existeraient?

Disons d'abord que, s'il existe des matières impondérables, notre argumentation contre le plein absolu s'ef-

fondre. Rien n'est plus facile que d'expliquer pourquoi les corps diffèrent de poids, même dans l'hypothèse du plein. « Quant au vif-argent, dit Leibnitz dans une réponse à Clarke, il contient à la vérité environ quatorze fois plus de matière pesante que l'eau, dans un pareil volume; mais il ne s'ensuit pas qu'il contienne quatorze fois plus de matière absolument. Au contraire, l'eau en contient autant, mais, prenant ensemble tant sa propre matière, qui est pesante, qu'une matière étrangère non pesante, qui passe à travers ses pores. Car tant le vif-argent que l'eau sont des masses de matière pesante percées à jour, à travers lesquelles passent beaucoup de matières non pesantes. Car c'est une étrange fiction que de faire toute la matière pesante. » Et, quant à notre troisième argument sur la résistance opposée au passage des corps, il n'a évidemment plus aucun sens dans un milieu qui n'a pas de masse, ou une masse infiniment petite, c'est-à-dire un milieu pour remuer les parties duquel avec des vitesses comparables aux mouvements des astres, il faut une force très petite. Il nous suffit donc d'admettre que le coefficient de frottement intérieur est nul dans un pareil milieu.

Mais la question doit être traitée par l'expérience, et, comme nous l'allons voir, du temps de Newton et de Leibnitz on était loin de la vérité.

Si une matière pouvait être considérée comme impondérable, c'est bien celle du feu ou de la chaleur. Or, on lit dans le *Traité de physique*, alors célèbre, de Musschenbrock, traduit en 1752, au chapitre qui concerne le feu : « Le feu qui s'introduit en grande quantité dans les corps, s'y arrête aussi et augmente leur poids; c'est pourquoi il doit être pesant de même que tous les autres corps. Je vais confirmer cela par quelques expériences, et

on pourra en trouver beaucoup d'autres sur ce même sujet dans les ouvrages de MM. Duclos, Boyle, Homberg et autres. Deux onces de limaille de plomb ayant été renfermées dans une retorte de verre et exposées pendant une heure et demie à la flamme du soufre allumé, on trouva que la plus grande partie de cette limaille s'était convertie en chaux. Lorsque tout cela se fut refroidi et qu'on l'eut pesé de nouveau, on trouva qu'il pesait quatre grains et demi plus qu'auparavant. Le feu dont on se servit pour des expériences analogues avec le cuivre et le vif-argent était de trois sortes différentes, de soufre, de charbon et d'esprit-de-vin ; il ne laissa pas de produire le même effet. On pourrait soupçonner ici que quelques-unes des particules qui servent de nourriture au feu se seraient peut-être introduites à travers les pores du verre et que, s'étant réunies avec les métaux, elles auraient augmenté leur poids, sans qu'il y fût justement resté des particules du feu; mais il ne sera pas difficile de lever ce doute, en se servant des rayons du soleil.

Les métaux dans ces expériences sont convertis en chaux, laquelle peut envelopper et renfermer une grande quantité de feu. Cependant on ne doit pas être surpris qu'une petite quantité de feu, contenue dans un corps, ne devienne pas sensible par l'augmentation de son poids, etc. » Suit une grande discussion sur les propriétés que doivent posséder les atomes du feu ; ils sont très subtiles, solides, lisses et pesants.

Passons à la lumière ; notre physicien se demande si le feu et la lumière forment deux corps différents, ou si leur différence vient seulement de la grandeur de leurs parties. Puis, si les corps terrestres en se divisant peuvent se changer en lumière, qui serait alors d'une matière iden-

tique aux corps pesants, mais plus rare. Musschenbrock fait même un calcul pour se rendre compte de l'ordre de grandeur de cette pesanteur de la lumière.

Par ces exemples on voit qu'aux environs de 1750 on était infiniment loin de se douter qu'il pût exister des corps d'une nature différente de celle des corps terrestres.

Lavoisier jeta une vive clarté sur la question. C'est une vraie joie de lire ses mémoires, tant ils sont bien écrits, clairs, concluants. Celui qui traite de la pesanteur du calorique est daté de 1783; il y est démontré que le calorique n'a de pas pesanteur appréciable.

« Si, d'une part, dit Lavoisier, on admet que le calorique a une pesanteur appréciable et sensible; si, d'une autre part, on est forcé de convenir qu'une partie s'échappe à travers les pores des vaisseaux, pendant la combustion, il s'ensuivra, par une conséquence nécessaire, qu'en opérant une combustion de soufre ou de phosphore dans des vaisseaux hermétiquement scellés on doit observer une diminution de poids, à mesure que le calorique se dégage et se met en équilibre avec les corps environnants ; cependant le contraire arrive, et voici comment je m'en suis assuré. »

Lavoisier expose alors une expérience faite avec six grains ou environ 3 décigrammes de phosphore; puis, il continue ses remarques : « Quoique, d'après cette expérience, il parût suffisamment prouvé que la chaleur n'a pas de pesanteur sensible, j'ai bien conçu que, pour avoir un résultat satisfaisant, il serait important d'opérer sur des quantités plus considérables. » Il expose les raisons qui lui ont fait délaisser l'essai avec le phosphore, et, remarquant qu'une livre d'eau pour se fondre exige la chaleur que dégagent en brûlant quatre-vingt-douze grains

de phosphore, il conclut « que, si la chaleur a une pesanteur appréciable, en enfermant une livre d'eau dans un vaisseau de verre scellé hermétiquement, et en le faisant geler, on doit obtenir une diminution de poids égale à celle qu'on aurait trouvée en faisant brûler quatre-vingt-douze grains de phosphore ». Il enferme donc une livre d'eau dans un matras, la pèse, la fait geler, la repèse et ne trouve pas la plus légère différence de poids. Il a d'ailleurs pris toutes les précautions possibles ; l'expérience a été faite par un temps froid, à une température voisine de 0°, de sorte que la température du ballon avant et après la congélation soit sensiblement la même. Sa balance est précise à un dixième de grain, soit 5 milligrammes ; il peut affirmer que le calorique nécessaire pour fondre une livre d'eau, soit 489 grammes, pèse moins de 5 milligrammes.

Or, ce calorique est très considérable : donc, conclut-il, le calorique peut être considéré comme n'ayant pas de pesanteur sensible dans les expériences de chimie.

A quoi doit-on donc attribuer l'accroissement de poids des corps qui brûlent, ou des métaux qui se transforment en chaux ? Simplement à la fixation d'un des airs constituant l'air vital, à ce gaz que, dès 1772, il a reconnu et appelé principe oxygène.

C'est par ces remarquables travaux que Lavoisier a implicitement mis hors de doute ce principe dont nous avons promis la démonstration, à savoir que le poids des corps matériels est immuable. Lavoisier a montré qu'à la condition de se mettre en garde contre l'absorption, ou la déperdition d'un autre corps matériel et pondérable, cette loi se vérifie rigoureusement dans tous les cas.

Il semblait donc nettement démontré à la fin du siècle dernier qu'il existait des impondérables et que la chaleur

était un fluide de cette espèce. Il résultait nécessairement que la quantité de la chaleur dût demeurer invariable, puisqu'il est admis comme principe indiscutable qu'une des propriétés de la matière est de demeurer constante en grandeur.

D'ailleurs, cette conclusion était très naturelle. Comme le fait remarquer M. Hirn, lorsque nous voyons un corps qui s'échauffe ou qui se refroidit, l'idée la plus simple est d'admettre que ce corps gagne ou perd quelque chose de matériel qui lui donne ou lui fait perdre ses qualités de chaud ou de froid. Il en est de même d'un corps qu'on rend lumineux, qu'on électrise, qu'on aimante. L'expérience ne tarde pas à apprendre, que, si matière il y a en plus ou moins dans un corps chaud ou froid, électrisé ou non, lumineux ou non, cette matière est du moins en quantité tellement rare qu'elle échappe, quant à son poids, quant à sa masse, aux moyens de constatation les plus délicats que nous connaissions. Une idée très naturelle encore s'est ajoutée par suite à la première. On a admis que la substance calorifique, lumineuse, électrique, est d'une autre espèce que la matière qui constitue la partie pondérable et la masse des corps.

Depuis un siècle nos idées se sont singulièrement modifiées sur le rôle des impondérables. Les expériences de Rumford, de Colding, de Joule, les théories de Mayer, de Clausius nous ont amenés à considérer la chaleur comme pouvant disparaître non pas sous les états dits latents, mais d'une façon absolue ; de sorte qu'il y ait bien quelque chose d'équivalent qui la remplace, mais rien moins qu'une quantité de matière. Cependant on n'a pas abandonné l'idée des impondérables, on l'a simplement modifiée. Au lieu de considérer les impondérables comme pouvant

directement agir suivant leur quantité, on ne les imagine plus que comme pouvant transmettre des mouvements ; la lumière, et par conséquent la chaleur sous une de ses formes, ne serait pas autre chose qu'un de ces mouvements. De même, au lieu d'imaginer des fluides impondérables, électriques et magnétiques déterminés en quantité, on tend à ramener les phénomènes électriques et magnétiques à des vibrations, des pressions, des tractions qui se transmettent à travers un milieu impondérable, un éther.

Nous pouvons résumer l'histoire de cette transformation si curieuse de l'idée de matière subtile, depuis Descartes. Pour Descartes la matière subtile n'est ni plus ni moins dense que le reste de la matière ; elle n'en diffère que par la forme de ses parties qui sont excessivement petites ; le plein est absolu. Pour Newton la matière subtile ne diffère pas essentiellement, comme nature, de la matière des corps terrestres ; elle a de la masse, et à égale densité une masse égale à celle du reste de la matière ; mais elle est excessivement rare, sa densité est très faible, on peut l'imaginer comme un gaz extrêmement raréfié : le vide de la machine pneumatique par exemple. Le plein pour Newton n'est pas absolu. Pour Lavoisier, la matière subtile ou éther est un impondérable qui n'a pas nécessairement les mêmes propriétés que le reste de la matière ; sa quantité totale est immuable, elle agit par ses changements de distribution, changements qu'on peut en un sens mesurer par certaines expériences dont l'ensemble compose la calorimétrie. Sadi Carnot pensait de même. Enfin, aujourd'hui on admet que la matière subtile, ou éther, est différente qualitativement de celle des corps terrestres ; elle sert à transmettre des pressions, des tractions, des mou-

vements ; c'est à travers elle que s'exercent des forces électriques et magnétiques, que voyagent les rayons de lumière : elle est constante en quantité et remplit l'espace laissé libre par la matière pondérable.

Sous cette forme, nous sommes tout disposés à admettre la proposition de Descartes qu'il n'y a point de vide, avec la modification de Leibnitz sur la définition de la substance.

IV

Nous sommes naturellement conduits à discuter l'importante question des actions à distance. Si l'on admet en effet communément des éthers, des matières subtiles, c'est par l'impossibilité où nous sommes d'imaginer aucune action se transmettant à travers le vide. Nous n'avons rien de mieux à faire que de citer au moins en partie la controverse si curieuse entre Leibnitz et Clarke, qui a épuisé le sujet.

Leibnitz disait : « Il est surnaturel que les corps s'attirent de loin, sans aucun moyen, et qu'un corps aille en rond, sans s'écarter par la tangente, quoique rien ne l'empêchât de s'écarter ainsi. Car ces effets ne sont point explicables par la nature des choses. — Comment entend-on l'attraction, quand on veut que le soleil, à travers un espace vide, attire le globe et la terre ? Est-ce Dieu qui sert de moyen ? Mais ce serait un miracle s'il y en a jamais eu ; cela surpasserait les forces des créatures. Ce moyen de communication est, dit-on, invisible, intangible, non mécanique. On pourrait ajouter, avec le même droit, inexplicable, non intelligible, précaire, sans fondement, sans exemple. » Et Leibnitz continue ainsi pendant

fort longtemps à démontrer, ce que d'ailleurs Clarke ne niait pas, à savoir que les Newtoniens ne comprenaient pas la cause ni le mécanisme de leur attraction. Leibnitz avait parfaitement raison.

Il est vrai que Clarke avait, lui aussi, parfaitement raison de lui répondre : « Si nous disons que le soleil attire la terre au travers un espace vide, c'est-à-dire que la terre et le soleil tendent l'un vers l'autre (quelle qu'en puisse être la cause), avec une force qui est en proportion directe de leurs masses, ou de leurs grandeurs et densités prises ensemble, et en proportion doublée inverse de leurs distances; et que l'espace qui est entre ces deux corps est vide, c'est-à-dire qu'il n'y a rien qui résiste sensiblement au mouvement des corps qui le traversent; tout cela n'est qu'un phénomène ou un fait actuel, découvert par l'expérience. Il est sans doute vrai que ce phénomène n'est pas produit sans moyen, c'est-à-dire sans une cause capable de produire un tel effet. Les philosophes peuvent donc rechercher cette cause (Clarke aurait pu ajouter que les savants ont le droit, eux aussi, de la chercher) et tâcher de la découvrir, si cela leur est possible. Mais, s'ils ne peuvent pas découvrir cette cause, s'ensuit-il que l'effet même ou le phénomène découvert par l'expérience (c'est là tout ce qu'on veut dire par les mots d'attraction et de gravitation), s'ensuit-il que ce phénomène soit moins certain et moins incontestable? Lorsqu'un corps se meut dans un cercle sans s'éloigner par la tangente, il y a certainement quelque chose qui l'en empêche; mais, si dans quelques cas il n'est pas possible d'expliquer mécaniquement la cause de cet effet, ou si elle n'a pas encore été découverte, s'ensuit-il que le phénomène soit faux? Ce serait une manière de raisonner fort singulière. »

On ne peut mieux parler : aucun physicien ne soutiendra que les actions à distance existent, parce que la chose lui est indifférente tant qu'il n'a pas une démonstration directe de leur existence ou de leur non-existence ; dans les phénomènes astronomiques, tout se passe comme si elles existaient ; on croyait, il y a quelques années, qu'il en était de même en électricité; on a montré depuis que la force électrique ou magnétique se transmet avec une vitesse finie et par ondes, tout comme le son le fait à travers un gaz. On a donc actuellement des raisons pour croire que ces effets sont transmis par un milieu, un éther ; mais, tant qu'on ne possédait pas ces expériences directes pour prouver l'existence de cet éther, l'absurdité de l'hypothèse d'une action à distance n'était pas pour gêner le savant. Peu lui importe que ses hypothèses contredisent le plus simple bon sens. Il ne cherche pas le mécanisme dernier des phénomènes, mais les représentations de ces phénomènes. Il ne nie pas que plus ces représentations se rapprochent de la réalité, plus elles faciliteront la découverte de nouveaux phénomènes et la connaissance de nouvelles lois. Mais il n'admet pas qu'on lui conteste son droit de choisir l'énoncé qui se rapproche le plus des équations qui, elles, lui sont imposées par le phénomène ; tant du moins qu'aucune expérience ne lui enlève ce droit.

Et, réciproquement, le métaphysicien, le philosophe doit se garder de prendre pour argent comptant, pour vérité démontrée les constructions des savants. Ceux-ci ne croient pas à leurs constructions; ils ne s'en servent que comme de moyens mnémoniques ; il serait puéril de leur attribuer plus de valeur réelle que ne le font ceux qui les ont inventées.

Ce qui n'empêche pas qu'au fond, dans le débat actuel,

Leibnitz n'ait eu absolument le droit de son côté ; il soutenait qu'il pouvait exister des matières impondérables et sans masse qui rempliraient les intervalles des corps pondérables ; de sorte que le vide, au moins en ce sens, n'existerait pas. Certes les raisons dont il se servait n'ont pas au point de vue scientifique la moindre valeur. « Il n'y a point de raison possible qui puisse limiter la quantité de matière. Ainsi cette limitation ne saurait avoir lieu..... Je pose que toute perfection que Dieu a pu mettre dans les choses, sans déroger aux autres perfections qui y sont, y a été mise. Or, figurons-nous un espace entièrement vide ; Dieu y pouvait mettre quelque matière, sans déroger en rien à toutes les autres choses : donc il n'y a point d'espace entièrement vide : donc tout est plein ; » et autres arguments analogues. Clarke dans ces conditions devait refuser la discussion, puisqu'ils ne parlaient pas la même langue. Mais il a tort, ayant accepté le débat, d'opposer à son adversaire des résultats de Newton qui n'ont rien à faire dans la question actuelle. Car, puisque Leibnitz supposait que sa matière est impondérable, elle ne doit pas avoir de masse d'après Newton, ni par conséquent exercer d'action appréciable, du moins quant à l'action qui provient de la quantité de matière. Or, c'est à peu près à cette objection que se réduit toute la discussion scientifique.

Clarke aurait dû simplement répondre : « Votre argumentation est très exacte, nous ne pouvons rien vous opposer ; mais actuellement nous n'avons que faire de vos impondérables qui embrouilleraient le problème ; rien ne démontre qu'ils n'existent pas, mais rien ne prouve leur existence. Si vous voulez bien attendre que nous ayons tiré de nos hypothèses tout ce qu'elles paraissent devoir nous donner, si absurdes qu'elles soient, nous tâcherons

ensuite à faire un nouveau pas dans l'étude des phénomènes. Et alors, forcés par le développement de nos équations de prendre une représentation moins simpliste que celle des actions à distance, nous trouverons peut-être commode d'employer vos impondérables. Malheureusement, il est fort probable, aurait-il pu ajouter, que l'un et l'autre nous serons morts. »

CHAPITRE IX

ÉTUDE DES IMPULSIONS

I

Une force F, constante de direction et d'intensité, imprime à une masse m une accélération constante g, d'autant plus grande que la masse est plus petite : on a, d'après le principe fondamental de la dynamique, $F = mg$. Si le corps part du repos, la vitesse v au bout d'un temps t est représentée par l'expression $v = gt$. De ces deux équations on tire :

$$mv = mgt = Ft.$$

Le produit mv s'appelle quantité de mouvement ; l'équation précédente s'énonce donc ainsi : « La quantité de mouvement imprimée à une masse invariable par une force constante de direction et d'intensité est égale au produit de la force par le temps pendant lequel elle agit. »

Ce théorème peut se généraliser. Usons de la représentation graphique dont nous nous sommes déjà servis à propos du travail (*fig.* 33). Portons sur une droite horizontale des longueurs proportionnelles au temps : soit par exemple 1 centimètre par seconde ; élevons au point A, correspondant au temps $OA = t$, une perpendiculaire AB

proportionnelle à la force : soit par exemple 1 centimètre par dyne.

Si la force est constante entre les temps OA et OD, la courbe représentative est une droite BC et l'aire du rectangle ABCD, égale au produit AD $\times$ AB, représente une quantité proportionnelle à la quantité de mouvements : la masse étant évaluée en grammes masses, la vitesse en

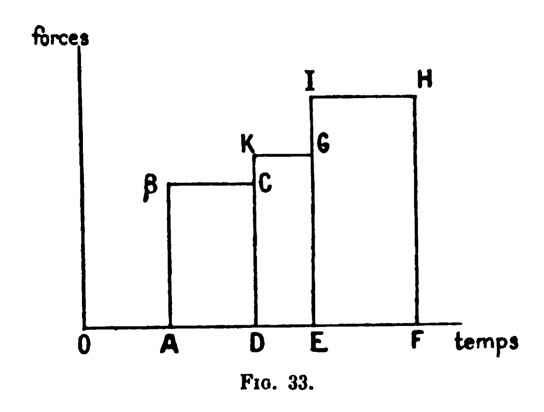


Fig. 33.

centimètres parcourus en une seconde, il y a autant d'unités dans la quantité de mouvement *mv* qu'il y a de centimètres carrés dans l'aire du rectangle ABCD. Si la force variait brusquement au temps OD pour devenir égale à DK et restait ensuite constante dans l'intervalle DE ; puis, qu'une même variation brusque se produisît au temps DE et ainsi de suite ; il est clair qu'il y aurait toujours autant d'unités dans la quantité de mouvement que de centimètres carrés dans l'aire polygonale ABCKGIHFA. Enfin, si la force est d'intensité variable à chaque instant (sa direction restant constante) et si elle est représentée en fonction du temps par la courbe BC (*fig.* 34), on peut démontrer rigoureusement et nous admettrons aisément, qu'il y a autant d'unités

dans la quantité de mouvement que de centimètres carrés dans l'aire ABCD.

Ceci posé, il est évident que, pour imprimer à une masse la même quantité de mouvement, on peut procéder de bien des manières : la force étant de direction invariable, mais variable en intensité, il suffit que l'aire ABCD ait une valeur constante ; à cette restriction près, nous sommes libres de supposer à sa courbe limitatrice BC telle forme, c'est-à-dire à la force telle loi qu'il nous plaira.

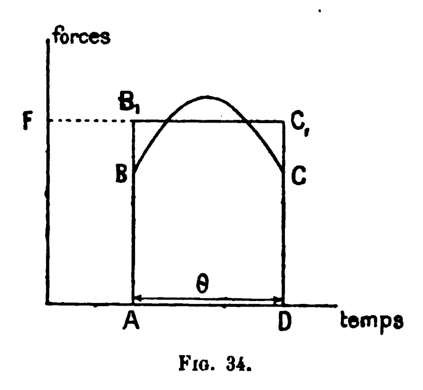


Fig. 34.

En particulier, nous pourrions remplacer la courbe BC par une droite B_1C_1 et construire ainsi un rectangle AB_1C_1D dont l'aire soit égale à l'aire ABCD. Ce qui revient à remplacer l'action d'une force variable représentée par la courbe BC par celle d'une force constante représentée par la droite B_1C_1. Nous appellerons intensité moyenne de la force cette force constante dont l'effet définitif sera le même que celui de la force réelle si elle agit pendant le même temps θ, et la quantité de mouvement se trouve égale au produit de la force moyenne par la durée de son action; soit θ.

Jusqu'à présent nous n'avons fait aucune supposition

sur la valeur absolue du temps θ ; les théorèmes précédents sont donc absolument généraux. Nous allons maintenant nous limiter à un cas particulier fort important, celui où ce temps θ est très court, une fraction de seconde, par exemple. Le produit $F\theta$ prend alors le nom de percussion ou d'impulsion. On conclut de ce qui précède l'énoncé général : « La mesure d'une percussion ou d'une impulsion est la quantité de mouvement qu'elle imprime à une masse donnée invariable. »

Il résulte de la définition même de la force moyenne que la force vraie, variable dans le temps, est, aux différents moments de son action, tantôt plus grande, tantôt plus petite ; l'évaluation de la force moyenne donne donc une limite inférieure de la valeur maxima de la force vraie.

Si le produit $F\theta$ doit rester constant, en d'autres termes si la même vitesse doit être communiquée à une masse donnée, moins le temps θ aura de durée, plus la force moyenne doit avoir d'intensité, et *a fortiori* plus certaines valeurs au moins de la force vraie F sont considérables. Ainsi la pesanteur met à peu près soixante secondes à donner à un grave tombant en chute libre une vitesse de 600 mètres à la seconde ; dans un canon c'est en moins d'un centième de seconde que l'obus prend une telle vitesse ; il faut donc qu'au moins pendant une fraction de ce centième de seconde la pression totale de la poudre sur le plat de l'obus soit plus de six mille fois le poids du projectile, puisque cette pression n'est pas constante.

La percussion ne diffère en rien de l'action ordinaire d'une force ; c'est tout simplement une force plus grande agissant pendant un temps plus court.

II

Ces théorèmes, qui paraissent évidents, ont été longs à découvrir ; nous n'en voulons comme preuve que l'extrait suivant de Fontenelle dans l'*Histoire de l'Académie* pour 1711. « La force motrice, dit-il, ou n'est appliquée qu'un moment au corps qu'elle meut, ou elle lui est appliquée pendant tout le temps de son mouvement. Dans le premier cas, elle lui imprime une vitesse qui doit demeurer la même pendant un temps infini, supposé que d'ailleurs rien ne s'y oppose. Dans le second cas, l'application continuelle de la force augmente à chaque instant la vitesse de l'instant précédent. La première vitesse est uniforme, la seconde accélérée.

La force simplement motrice, c'est-à-dire celle qui produit une vitesse uniforme, n'étant appliquée qu'un instant au corps qu'elle meut, ne peut avoir de variété dans son action, ni par conséquent être variable, et même, à proprement parler, elle n'est pas constante non plus, parce qu'il faudrait pour cela qu'elle agît également pendant une suite d'instants et de temps égaux. Mais par la raison contraire la force accélératrice peut être constante ou variable.

Si pendant le premier instant, ou temps que la force accélératrice a été appliquée au corps, elle lui a imprimé un certain degré de vitesse, elle lui imprimera un nouveau degré égal pendant un second temps égal et toujours ainsi de suite. Donc les sommes de ces vitesses, ou la vitesse totale acquise par le corps au bout d'un certain temps sera toujours comme ce temps et les vitesses acquises au

bout de différents temps seront comme ces temps. La force simplement motrice est d'autant plus grande qu'elle fait parcourir un certain espace déterminé en moins de temps ; cette mesure de grandeur convient aussi à la force accélératrice.

Mais le temps entre dans l'idée de force accélératrice, parce qu'il est le temps pendant lequel la force a été appliquée ou a agi ; et il est clair que le temps n'entre pas de cette manière dans l'idée de force simplement motrice. Si la mesure de grandeur de la force simplement motrice est la vitesse uniforme qu'elle produit, donc la mesure de la force accélératrice est la vitesse produite divisée par le temps employé à la produire. »

Pour revenir à nos notations, nous avons trouvé $F\theta = mv$. Ce que Fontenelle appelle force simplement motrice n'est pas autre chose que ce que nous avons désigné par le nom d'impulsion ou de percussion ; ce qu'il appelle force accélératrice, c'est ce que nous désignons sous le nom de force ; et on a bien, du moins quand la force est constante, $F = \frac{mv}{\theta}$; c'est la vitesse divisée par le temps employé à la produire.

En définitive, les conclusions de Fontenelle sont mathématiquement exactes, mais l'idée qu'il se faisait de la percussion est absolument fausse. Car, au lieu de la considérer comme l'action d'une force grande et pouvant être variable, agissant pendant un temps court, mais fini, il la regarde comme quelque chose d'irréductible à une force accélératrice agissant un temps fini ; il suppose même qu'elle agit en un instant.

C'est, d'ailleurs, ce qui résulte du passage qui suit l'extrait cité ; il y parle de la force simplement motrice

comme infiniment grande par rapport à la force accélératrice. Or, si les gens peu exercés aux mathématiques confondent très grande et infiniment grande, si les philosophes peuvent voir dans l'infini une extension indéfinie du fini, sous la plume d'un mathématicien ce mot infiniment grand prend un sens nettement déterminé, qui dans l'espèce constitue une grave erreur ; surtout si l'on remarque la date de l'écrit en question, 1711, c'est-à-dire bien des années après la publication des travaux de Leibnitz et de Newton sur le calcul des infiniment petits.

Bernouilli, dans un discours *sur la communication du mouvement* daté de 1724, expose des idées parfaitement exactes sur la nature du choc et par conséquent de l'impulsion.

« Un corps dur, veut-il démontrer, rencontrant directement, avec une vitesse déterminée, un ressort d'une élasticité parfaite, dont un bout est appuyé sur un plan invariable, sera repoussé selon la même direction et avec la même vitesse. » A l'occasion de ce théorème, il donne du phénomène l'analyse très profonde que voici : « Cette proposition est claire et la vérité en saute aux yeux, pour peu d'attention qu'on fasse à la nature de l'action et de la réaction. Car, dans le premier instant que le corps atteint le ressort débandé, ce ressort est contraint de se resserrer, et par là il acquiert un peu de force, au moyen de laquelle il résiste un peu au corps et lui ôte par conséquent un peu de vitesse. Dans le second instant, le corps comprimant un peu le ressort, celui-ci reçoit un nouveau petit degré de force et fait perdre au corps quelque peu de sa vitesse, et cela continue ainsi par tous les degrés infiniment petits, jusqu'à ce que, la vitesse du corps étant éteinte, il ait communiqué toute la force au ressort par un

nombre infini de diminutions élémentaires ou infiniment petites. Mais, dès que le corps est parvenu au repos, le ressort commence à se débander et à lui rendre successivement et dans un ordre renversé de temps ces mêmes éléments de vitesse qu'il lui avait ôtés ; en sorte que la perte du dernier instant de vitesse sera réparée par le gain dans le premier instant, celle du pénultième dans le second instant, et ainsi de suite; jusqu'à ce que, le ressort étant entièrement débandé, le corps aura regagné sa première vitesse, mais dans un sens contraire. »

Nous aurons occasion de revenir sur ce théorème; mais voilà pour l'instant ce qui en fait le grand intérêt : assimilant les corps durs élastiques à des ressorts, il étend sa proposition au choc de ces corps et ajoute : « Toute action se fait successivement et par élément, quelque petite que paraisse la durée de l'action entière. Ainsi le choc de deux corps qui paraît commencer et finir dans le même instant, ne laisse pas d'être d'une durée qui, à parler proprement, a ses éléments, je veux dire un nombre infini de parties infiniment petites. » On le voit; nous sommes loin de Fontenelle et de sa force motrice qui s'exerce en un instant; avec Bernouilli, le choc est ramené à l'action d'une force grande, mais finie, agissant pendant un temps court, mais fini. La théorie complète de l'impulsion, de la percussion ou du choc est donc connue.

III

Nous allons étudier maintenant comment Descartes et ses contemporains comprenaient le choc ; cela est d'une importance philosophique très grande, bien que cette partie de la mécanique ne fût alors qu'un tissu de curieuses erreurs.

Le premier fait qui résulte des considérations précédentes, c'est qu'il y a une infinité de manières équivalentes de communiquer une certaine vitesse à une masse donnée, mais qu'il sera nécessaire d'employer des forces d'autant plus intenses que leur durée d'action devra être plus courte. Et réciproquement, si l'on a à sa disposition une masse en mouvement, on peut, en lui opposant un obstacle, s'en servir pour exercer une pression sur cet obstacle. Cette pression est généralement variable avec le temps ; elle dure, si l'obstacle est mou, ou si le corps mobile est mou, jusqu'à ce qu'ils aient perdu toute vitesse relative, qu'ils soient en repos l'un par rapport à l'autre ; si les deux corps sont élastiques jusqu'à ce que, par leur réaction réciproque, ils se soient séparés par le choc. Mais en tous cas, qu'après le choc ils restent ou non en contact, il y aura toujours un instant où les deux corps n'auront aucune vitesse relative, puisque, avant de rebondir, s'il rebondit, il faut bien que le mobile s'arrête un instant. Soit θ le temps qui s'écoule entre le commencement du choc et cet instant où les deux corps n'ont pas de vitesse relative. Si on représente les pressions en fonction du temps comme l'indique la figure 34, l'aire ABCD, égale à la quantité de mouvement que possédait le corps mobile,

est toujours la même, quelles que soient les conditions du choc. Si F est la pression moyenne, le produit $F\theta$ est donc complètement déterminé.

Est-il possible pratiquement, le produit restant constant, de donner à l'un des facteurs des valeurs arbitraires, par exemple de faire durer le choc moins longtemps, corrélativement d'augmenter la force moyenne? L'expérience montre que la durée du choc dépend de la plus ou moins grande facilité que les corps ont à se déformer : je ne dis pas de leur élasticité, car nous avons appelé corps élastique un corps qui déformé revient exactement à sa forme primitive; l'acier est un corps très élastique, toutefois il se déforme très peu; le caoutchouc, qui se déforme beaucoup, n'est pas un corps parfaitement élastique; le plomb, qui se déforme aussi beaucoup, ne l'est pas du tout.

D'où résulte que la force moyenne qui s'exerce entre les deux corps pendant leur choc est d'autant plus grande que les corps, élastiques ou non, se déforment plus facilement ; et, d'après une remarque que nous avons faite, il en sera de même de quelques valeurs au moins de la force vraie, puisqu'une quantité est toujours, au moins un certain temps, supérieure à sa moyenne.

Tandis qu'une balle d'ivoire tombant, sur un plan de marbre, ne reste en contact avec lui qu'une très petite fraction de seconde, $\frac{1}{10,000}$ par exemple, une balle de caoutchouc tombant sur le sol y demeure adhérente pendant un temps très notable. Conséquemment, si on place un objet fragile entre le plan de marbre et la balle d'ivoire, il sera brisé; tandis que le même objet, placé entre le sol et une balle élastique de même poids que la balle d'ivoire, et tombant de la même hauteur, peut ne pas

l'être. Car un corps qui, sans dommage, supporte longtemps une faible pression peut être brisé par une forte pression agissant un temps très court.

On peut démontrer que cette interprétation du phénomène est exacte par une intéressante expérience qu'on a discutée sans aboutir pendant tout le XVII[e] siècle.

On lit dans une lettre de Descartes, datée de 1640, le passage suivant : « De dire combien il faut de pesanteur pour égaler la force d'un coup de marteau, c'est une question de fait où le raisonnement ne sert de rien sans l'expérience. » Consultons donc l'expérience et voyons ce qu'elle nous répond.

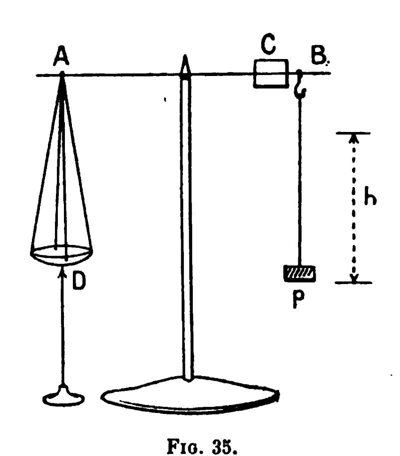


Fig. 35.

Soit une balance (*fig.* 35) dont on a supprimé un des plateaux ; on l'a remplacé par un crochet à l'extrémité du fléau et un contrepoids C qui fait équilibre à l'autre plateau, dans lequel on met un poids P. Au crochet est suspendu par un fil le poids $p < P$. Un arrêt D maintient le fléau horizontal. Soulevons le poids p d'une hauteur h et laissons-le retomber; c'est comme si nous donnions un coup de marteau sur le plateau B supposé remis en place. L'appareil est donc disposé de manière à pouvoir comparer ce choc à la pesanteur; c'est bien là l'expérience requise par Descartes : nous allons montrer qu'elle n'a absolument aucun sens. En effet, supposons que la hauteur h reste constante ainsi que le poids p : la quantité de mouvement à dépenser est donc toujours la même, au

moment où le cordon commence à être tendu et agit sur le crochet B. A supposer qu'un choc fût comparable à un poids, le choc serait inférieur à l'excès $P-p$ ou le surpasserait suivant que le plateau A resterait ou non au contact de l'arrêt D. Or, l'expérience montre que ce contact subsiste ou non pour la même quantité de mouvement, suivant la nature de l'élasticité du cordon qui tient le poids ; de sorte que, avec une quantité de mouvement, c'est-à-dire avec une impulsion donnée et un excès $P-p$ donné, nous ferons à notre gré que le contact cesse ou ne cesse pas. Il suffit, pour que le plateau A se sépare de l'appui D, qu'à un instant quelconque la force appliquée en B de haut en bas soit supérieure au poids P. Or, pour une quantité donnée de mouvement, le produit $F\theta$ seul est donné ; si donc nous nous arrangeons pour que θ soit petit, en d'autres termes si nous prenons un fil peu extensible, la force moyenne F et au moins quelques valeurs de la force vraie sont plus grandes que P ; le plateau est soulevé. Si nous prenons un fil très extensible, comme du caoutchouc, la quantité de mouvement s'éteint lentement, θ est grand, et F est aussi petit que nous voudrons ; le contact ne cessera pas. Ainsi l'expérience donne tel résultat que l'on désire.

Descartes était loin d'avoir sur ce sujet des idées nettes, et ses conclusions sont diamétralement opposées aux précédentes, comme il résulte d'une discussion bizarre entre lui et le Père Mersenne. Voici de quoi il s'agissait :

On trouve dans des lettres de 1639 le commencement de la controverse. « Il y a, dit-il, diverses choses à considérer en la percussion, comme la durée du coup qui fait qu'on rendra une balle plus plate en la frappant d'un marteau sur un coussin que sur une enclume. » Le Père

Mersenne essaye l'expérience et trouve un résultat opposé. Il fait part de ses doutes à Descartes, qui lui répond : « Je m'étonne de ce que vous n'aviez pas encore ouï qu'on peut mieux aplatir une balle de plomb sur un coussin ou sur une enclume suspendue et qui peut céder au coup que sur une enclume ferme et immobile, car c'est une expérience fort vulgaire. Ce n'est pas assez de frapper une balle de plomb avec beaucoup de force pour l'aplatir, mais il faut aussi que cette force dure quelque temps, afin que les parties de cette balle aient loisir cependant de changer de situation. Or, quand cette balle est sur une enclume ferme, le marteau rejaillit en haut, quasi au même instant qu'il l'a frappée, et ainsi n'a pas le loisir de l'aplatir tant que si l'enclume ou autre corps qui est sous cette balle, cédant au coup, fait qu'il demeure longtemps appuyé sur elle. »

Nouvel insuccès du Père Mersenne, qui redemande un supplément d'explication. Pour le coup le maître y met de l'ironie. « Par un coussin, j'entendais une enclume suspendue ou bien une plaque de fer mise sur un coussin; car, de prendre un coussin tout seul et bien mou, il est aisé de croire que la balle se doit enfoncer dedans au lieu de s'aplatir. »

« Comme il y a des choses qu'on enfonce mieux avec un marteau de bois qu'avec un de fer, et d'autres au contraire. C'est ainsi que les charpentiers ou menuisiers se servent d'un maillet de bois pour frapper leur ciseau et fendent, par ce moyen, plus aisément leur bois que s'ils se servaient d'un marteau de fer. Lorsque les cuisiniers veulent rompre l'os d'une éclanche de mouton avec le dos d'un couteau, ils le mettent seulement dans leur main ou sur une serviette et, frappant dessus, le cassent plus aisément que s'il était sur une table ou sur une enclume. » Discu-

tons un peu toutes ces interprétations, qui, pour le dire dès l'abord, sont absolument erronées.

Il est plus facile d'aplatir du plomb sur une enclume que sur un coussin ; et, pour ce qui est du coussin recouvert d'un morceau de fer, ce n'est là qu'une défaite. Quant à cette explication que, le coup étant de plus longue durée, les parties de la balle ont le loisir de se déplacer, nous avons vu que c'est tout le contraire qui a lieu. Si les menuisiers emploient des maillets en bois, c'est que leurs outils ont des manches en bois, pour la commodité du travail ; et, s'ils se servaient de marteaux de fer, ils abîmeraient ces manches et les mettraient rapidement hors d'usage. Aussi les serruriers, dont les outils ne sont pas emmanchés de bois, se servent-ils toujours de marteaux de fer, avec lesquels les effets sont moins doux, mais plus intenses.

Pour l'éclanche de mouton, le fait est vrai en un sens, mais fort mal interprété. On sait que les déformations se transmettent tout le long d'un corps solide ; si l'on frappe un coup de marteau au milieu d'un bâton, le choc n'est pas ressenti aux extrémités en même temps et la vitesse de la propagation de ce choc, égale à la vitesse de propagation du son, n'est que de quelques mille mètres par seconde. Ce ne sont donc que les parties qui entrent en contact avec le marteau qui supportent tout d'abord l'effet total ; il peut donc se faire qu'il y ait rupture sous le choc au point touché, auquel cas la pression ne se transmettra évidemment pas. Ces faits sont connus de toute antiquité des bateleurs et, sans remonter trop haut, on lit dans la *Mécanique* de La Hire, publiée en 1695, après des raisonnements analogues aux précédents, le passage qui suit : « On peut appuyer cette raison par

quelques expériences, comme si l'on pose un bâton sur le bord de deux verres ; et, en frappant un très grand coup sur le milieu du bâton, on le rompt sans que les verres se cassent. De même que si l'on met dans la main un os d'éclanche de mouton et qu'on l'y soutienne par ses extrémités, lorsqu'on donnera un coup assez fort sur le milieu de l'os, il se cassera sans faire aucune impression sur la main ; mais, si le coup n'est que médiocre, l'os ne se cassera pas et la main portera le coup. » Ce que La Hire n'ajoute pas, c'est que, si on place l'os sur une enclume et qu'on donne le coup assez fort, non seulement il se cassera, mais il se réduira en miettes ; et, si les bouchers n'ont garde de procéder ainsi, c'est précisément qu'ils ne veulent pas obtenir un effet aussi énergique.

IV

Laissons ces discussions, qui n'avaient d'autre but que d'éclaircir une curieuse controverse, tout en montrant la difficulté du sujet, et passons à l'étude du choc des corps. La solution complète du problème est maintenant aisée.

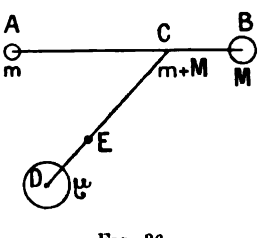


Fig. 36.

Nous allons définir tout d'abord ce qu'on appelle centre de masse, ou barycentre, ou centre de gravité. Soient deux points matériels ; en A est supposée condensée une masse m ; en B, une masse M. On appelle barycentre un point C placé sur la droite AB tel que le produit $CB \times M = CA \times m$. Ajoutons une troisième masse μ au point D (*fig.* 36). Pour

trouver le barycentre des trois masses, nous supposerons en C, barycentre des masses m et M, transportée la masse totale $m + M$, puis nous chercherons le point E tel que le produit $CE \times (m + M) = ED \times \mu$, et ainsi de suite jusqu'à l'épuisement de toutes les masses. On démontre : 1° que le point barycentre général ainsi trouvé est indépendant de l'ordre dans lequel ont été successivement prises les différentes masses ; 2° que, si le système est supposé pesant et de dimensions assez restreintes pour que les forces de la pesanteur puissent être considérées comme parallèles en tous les points du système, c'est par le barycentre ou centre de masse que passe la résultante des forces de la pesanteur ; il prend alors le nom de centre de gravité.

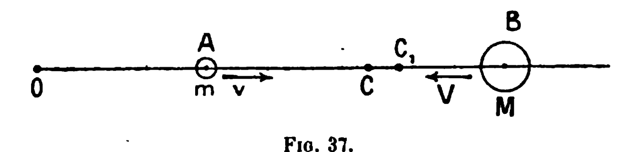


Fig. 37.

Ceci posé, nous allons démontrer la proposition suivante : si deux corps non élastiques se meuvent à la rencontre l'un de l'autre avec des quantités de mouvements égales : 1° leur centre de masse est immobile ; 2° ils se rencontrent en ce centre de masse ; 3° après le choc ils restent immobiles.

Soient v et m, V et M les vitesses et les masses des points A et B (*fig.* 37) ; ils se déplacent dans le sens des flèches, soit $d_0 = OA$, $D_0 = OB$ les distances de ces points à une origine O, au commencement de l'expérience ; déterminons la position des masses au bout du temps t. La distance OA sera devenue $d = d_0 + vt$; la distance OB, $D = D_0 - Vt$.

Le choc a lieu lorsque les distances OA et OB sont égales, c'est-à-dire à une époque déterminée par la relation $d = D$ ou $d_0 + vt = D_0 - Vt$. D'où $t = \frac{D_0 - d_0}{V + v}$. Pour trouver la distance du point de rencontre C à l'origine, soit L, il suffit de chercher la distance à l'origine du point A à cette époque, c'est-à-dire substituer la valeur $t = \frac{D_0 - d_0}{V + v}$ dans les relations $d = d_0 + vt$,

d'où $$L = \frac{d_0 V + v D_0}{V + v}.$$

Déterminons maintenant le centre de la masse. C'est un point C_1 tel que l'on ait $AC_1 \times m = BC_1 \times M$. Soit L_1 la distance OC_1, on a :

$$AC_1 = L_1 - d \qquad BC_1 = D - L_1.$$

Le point C_1 est donc déterminé par l'équation :

$$(L_1 - d)\, m = (D - L_1)\, M,$$

et remplaçant d par $d_0 + vt$, D par $D_0 - Vt$, il vient :

$$L_1 = \frac{MD_0 + md_0}{M + m} + \frac{mv - MV}{m + M} t.$$

Or, par hypothèse, $mv = MV$. On en déduit facilement :

$$L_1 = \frac{Vd_0 + vD_0}{V + v}.$$

Le centre de gravité est fixe et coïncide avec le point de rencontre.

Enfin, je dis qu'au moment du choc les mouvements se détruisent réciproquement. Car, la réaction étant toujours égale à l'action, il naît entre les corps pendant le choc des forces égales et opposées; les impulsions produites de part et d'autre sont constamment égales, et, puisqu'elles sont mesurées par les quantités de mouvement qui sont égales, suivant l'hypothèse, les deux corps seront réduits au repos en même temps. Comme ils sont parfaitement durs, c'est-à-dire privés d'élasticité, ou parfaitement mous, rien ne leur rendant le mouvement qu'ils auront perdu, ils resteront au repos.

Voici une seconde proposition qui complète la précédente. Si les deux corps qui se meuvent l'un contre l'autre avec des vitesses réciproquement proportionnelles aux masses, ou, ce qui revient au même, avec des quantités de mouvement égales, sont parfaitement élastiques, je dis : 1° qu'après le choc chacun d'eux se meut en sens contraire, avec sa première vitesse et, par conséquent, avec sa première quantité de mouvement; 2° que leur commun centre de masse demeure aussi immobile après le choc qu'il l'était avant.

En effet, supposer les corps parfaitement élastiques, c'est admettre que dans le choc, au moment où les vitesses sont réduites à zéro, il s'est formé entre les deux corps comme un ressort bandé qui commence alors à se débander en faisant, de part et d'autre, sur les deux corps des efforts égaux pour les éloigner l'un de l'autre. Chaque corps oppose au mouvement, par son inertie, une résistance proportionnelle à la masse, d'où il suit que, lorsque le ressort est entièrement débandé, les deux corps continuent à se mouvoir en sens inverse de leur premier mouvement avec des vitesses égales aux vitesses qu'ils

possédaient primitivement; ces vitesses ont seulement changé de direction. Quant au centre de masse, je dis qu'il coïncide toujours avec le lieu du choc; car, puisque l'on a $mv = MV$, après un temps t quelconque, on a encore $mvt = MVt$; or, $vt = CA$, $Vt = CB$, d'où $mCA = MCB$. Le point C reste donc barycentre.

Le problème du choc des corps est donc complètement résolu pour des corps non élastiques parfaitement durs ou parfaitement mous et pour des corps complètement élastiques, au moins dans le cas où les quantités de mouvement des deux corps sont égales. Mais on peut ramener tous les cas à celui-ci par un artifice de raisonnement dû à Bernouilli.

Il remarque que, si deux ou plusieurs corps qui se meuvent sur un plan ou dans un espace quelconque viennent à se rencontrer et à se heurter les uns les autres de telle manière qu'on voudra, les mouvements qui résulteront de leur choc seront les mêmes les uns par rapport aux autres, soit que le plan ou l'espace dans lequel ils sont soit en repos, soit qu'il se meuve lui-même d'un mouvement uniforme. Car la force du choc dépend seulement des vitesses relatives. Or, ces vitesses ne changent pas avant le choc, soit que le plan ou l'espace soit sans mouvement, soit qu'il se meuve uniformément suivant une direction donnée; les vitesses relatives seront donc les mêmes après le choc. C'est une application d'une proposition générale sur les forces intérieures que nous avons eu l'occasion de démontrer.

Partant de là, pour résoudre le problème de la communication du mouvement, il n'y a qu'à supposer que le mouvement des corps se fait sur un plan auquel on impose arbitrairement un mouvement égal et opposé à celui du

centre de gravité, ce qui ne change rien aux chocs des corps sur ce plan. De cette manière et par rapport aux objets qui sont en repos absolu, le centre de gravité n'aura point de vitesse; les corps A et B auront même quantité de mouvement; nous sommes ramenés au cas précédent. Chacun des corps est repoussé après le choc avec la vitesse qu'il avait avant le choc.

Ceci posé, il nous est bien facile de donner les formules générales qui résolvent le problème du choc des deux corps; nous avons en effet plus haut calculé la vitesse du centre de gravité ou barycentre; car nous avons obtenu pour sa distance au point O, origine, l'expression :

$$L_1 = \frac{MD_0 + md_0}{M + m} + \frac{mv - MV}{m + M} t.$$

Cela revient à dire que sa vitesse est :

$$u = \frac{mv - MV}{m + M},$$

vitesse dirigée à partir de l'origine vers la droite.

Imprimons au plan et aux corps qu'il supporte une vitesse égale dirigée vers la gauche. Dans ces conditions, la vitesse définitive du point A est $v - u$ vers la droite, la vitesse du point B est $V + u$ vers la gauche. Pendant le choc le centre de gravité étant immobile, après le choc la vitesse du point A est $v - u$ vers la gauche; et celle du point B, $V + u$ vers la droite. Arrêtons maintenant le plan auxiliaire, ce qui revient à restituer aux corps qu'il supporte une vitesse u vers la droite; la vitesse du point A devient $v - 2u$ vers la gauche; la vitesse du point

B, $V + 2u$ vers la droite; soient w et W ces vitesses, on a en définitive :

$$w = \frac{(M - m)v + 2MV}{m + M} \qquad W = \frac{(m - M)V + 2mv}{m + M}.$$

Si les corps n'avaient pas été élastiques, après le choc ils auraient été ramenés au repos. Mais, par l'arrêt du plan auxiliaire, ils auraient pris vers la droite une vitesse :

$$u = \frac{mv - MV}{m + M}.$$

On voit que de toute façon le centre de masse conserve dans le choc son mouvement en vitesse et en direction, ou, ce qui revient au même, la somme des quantités de mouvement reste constante, pourvu que l'on considère comme positives les quantités dont les vitesses sont dirigées en un sens, et négatives celles dont les vitesses sont dirigées en sens contraire. En effet, la vitesse du centre de gravité est donnée par la formule :

$$u = \frac{mv - MV}{m + M}$$

Or $mv - MV$ représente justement la somme des quantités de mouvements ainsi calculée; on voit qu'elle est égale au produit de la vitesse du centre de gravité par la somme des masses. Il revient donc au même de dire que la somme des quantités de mouvement se conserve, avec la restriction indiquée, ou de dire que la vitesse du centre de gravité est invariable.

Mais nous reviendrons plus loin sur cette importante question de la conservation de la quantité de mouvement.

V

Les lois de la communication du mouvement ont fait travailler les physiciens à un point qu'on ne saurait croire, vu le peu de place que cette question occupe dans les traités de physique modernes; cependant jusque vers 1670 on ne sut rien d'exact. Presque en même temps Wrenn, Wallis et Huyghens donnèrent la solution du problème et Mariotte, en 1679, publia une très remarquable et très longue série d'expériences d'une précision qui n'était pas habituelle à cette époque. Le principe de sa méthode expérimentale est excellent : il s'agissait de faire en sorte que deux corps se rencontrent directement avec des vitesses qui soient l'une à l'autre en telle raison que l'on voudra. Il y parvint en utilisant les propriétés du pendule.

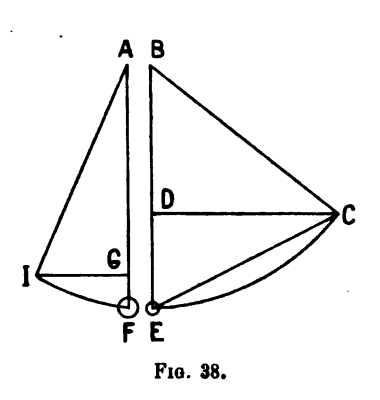


Fig. 38.

On sait que la vitesse qu'un grave possède dans un plan horizontal est indépendante du chemin qu'il a parcouru et ne dépend que de la hauteur de la chute; de plus, que cette vitesse est proportionnelle à la racine carrée de cette hauteur. Soit donc un poids suspendu à un cordon de longueur $BE = l$; si on lâche le poids d'un point C, la vitesse sur la verticale BE est proportionnelle à $\sqrt{DE}$ (*fig.* 38). Or, dans la circonférence construite avec BE comme rayon, on a $CE^2 = 2l.DE$, $CE = \sqrt{2l}\sqrt{DE}$. La corde CE est donc proportionnelle à la racine carrée de la longueur DE. Donc

la vitesse du mobile en E est proportionnelle à la corde CE et sensiblement à l'arc CE, tant que cet arc correspond à un angle moindre que 15°. De plus, l'expérience montre qu'un pendule lâché du repos, alors qu'il fait un angle quelconque, mais petit, avec la verticale parvient toujours dans le même temps à cette verticale. Donc les deux balles E et F lâchées en même temps de deux points C et I correspondant à des arcs inégaux CE et FI parviennent ensemble sur la verticale et s'y choquent avec des vitesses connues proportionnelles aux arcs CE et FI.

Les résultats des expériences sont conformes à la théorie. Nous allons seulement discuter quelques expériences sur la chute des corps qui servent d'illustration à des idées singulières de Descartes, et qu'il est bon de connaître pour la suite.

Nous avons vu que Descartes avait cherché à comparer le choc et la pesanteur; et voici quelles considérations l'avaient amené à se poser ces questions ; elles se rattachent d'ailleurs à son système général des tourbillons : « La force de la percussion, dit-il, ne dépend que de la vitesse du mouvement. Car il faut savoir, quoique Galilée et quelques autres disent le contraire, que les corps qui commencent à descendre ou à se mouvoir en quelque façon que ce soit ne passent point par tous les degrés de tardiveté ; mais que, dès le premier moment, ils ont une certaine vitesse qui s'augmente beaucoup après, et c'est de cette augmentation que vient la force de la percussion. Par exemple, si le marteau A pèse 100 livres et qu'il ait seulement un degré de vitesse, lorsqu'il commence à descendre de soi-même, il ne pressera l'enclume B que de la force que donne ce degré de vitesse à cent livres ; et, si un autre marteau qui ne pèsera qu'une livre acquiert

100 degrés de vitesse en tombant sur cette enclume de 5 ou 6 pieds de haut, il la pressera aussi fort que le marteau A. Or, la main conduisant ce marteau peut en augmenter la vitesse de plusieurs milliers de degrés ; le marteau a dix mille fois plus de force que lorsqu'il est posé fort doucement. Cela ne vient que de ce qu'au moment qu'il rencontre cette enclume il est en train de se mouvoir dix mille fois plus vite. » Mariotte renchérit naturellement sur le dire du maître. Il pose d'abord cet avertissement : « Galilée a fait quelques raisonnements pour prouver qu'au premier moment qu'un poids commence à tomber, sa vitesse est plus petite qu'aucune qu'on puisse déterminer. Mais ces raisonnements sont fondés sur les divisions à l'infini, tant des vitesses que des espaces passés et des temps des chutes, qui font des raisonnements très suspects, comme celui que les anciens faisaient pour prouver qu'Achille ne pourrait jamais attraper une tortue ; auquel raisonnement il est difficile de répondre et donner une solution... » On ne peut guère en vouloir à Mariotte, en 1679, de ne pas être au courant du calcul des infiniment petits, bien qu'Archimède en ait connu suffisamment pour la réfutation de ces ridicules problèmes classiques.

Mariotte ne s'en tient pas là à ce raisonnement et, reprenant l'expérience indiquée par Descartes, il cherche à démontrer que la vitesse « de passer un espace de deux lignes en une seconde », c'est-à-dire une vitesse de $4^{mm},5$ par seconde, est certainement moindre que celle que possèdent les corps pesants au commencement de leur chute. Pour le montrer, il prend de petits canons en verre qu'il place sur un plan et charge de poids jusqu'à les écraser. Puis, il laisse tomber de médiocre hauteur des poids de fer, et il augmente ces poids jusqu'à ce que derechef les

bouts de verre soient écrasés. « Or, si par exemple il fallait 400 livres de poids pour écraser le petit cylindre et que, laissant tomber de 7 pouces ($0^m,19$) un poids de 2 livres 2 onces, il en écrasât un semblable, on ferait cette analogie, comme 400 est à 2 livres $\frac{1}{8}$, ainsi une vitesse à parcourir 830 lignes ($1^m,87$) en une seconde, qui est la vitesse acquise pendant la chute, est à 4 lignes et un peu plus. D'où vous pourrez juger que la première vitesse d'un poids de 400 livres, qui commence à tomber dans un air calme, est telle qu'il pourrait faire quatre lignes (9^{mm}) en une seconde, s'il continuait à se mouvoir uniformément selon cette première vitesse. »

Nous avons vu que ces expériences ne prouvaient rien; elles n'en sont pas moins curieuses, car elles montrent combien cette idée de percussion que nous venons d'étudier, était délicate et que des notions exactes de calcul différentiel étaient indispensables pour la bien comprendre.

CHAPITRE X

DES LOIS DU CHOC DANS DESCARTES

I

Nous avons donné tant de preuves du génie de Descartes qu'il ne paraîtra pas injuste que nous insistions sur ses erreurs. Elles ont eu, au XVII[e] siècle, un immense retentissement; elles ont poussé la mécanique vers des progrès inattendus, car une grande idée fausse est souvent plus profitable qu'une médiocre qui serait vraie. Enfin, leur discussion nous permet de traiter plusieurs questions intéressantes et curieuses.

Toute la dynamique de Descartes est basée sur le choc et les lois du choc tirées de l'immutabilité divine. « De cela aussi, dit-il, que Dieu n'est point sujet à changer et qu'il agit toujours de même sorte, nous pouvons parvenir à la connaissance de certaines règles que je nomme les lois de la nature et qui sont les causes secondes des divers mouvements que nous remarquons en tous les corps, ce qui les rend ici fort considérables.

— La première est que chaque chose, en particulier, continue d'être en même état autant qu'il se peut et que jamais elle ne change que par la rencontre des autres. Ainsi nous voyons tous les jours que, lorsque cette matière

est carrée, elle demeure toujours carrée, s'il n'arrive rien d'ailleurs qui change sa figure ; et que, si elle est au repos, elle ne commence point à se mouvoir de soi-même ; mais, lorsqu'elle a commencé une fois de se mouvoir, nous n'avons aussi aucune raison de penser qu'elle doive jamais cesser de se mouvoir de même force pendant qu'elle ne rencontre rien qui retarde ou arrête son mouvement.

De façon que, si un corps a commencé une fois de se mouvoir, nous devons conclure qu'il continue par après de se mouvoir et que jamais il ne s'arrête de lui-même.

— La seconde loi que je remarque en la nature est que chaque partie de la matière en son particulier ne tend jamais à continuer de se mouvoir suivant des lignes courbes, mais suivant des lignes droites, bien que plusieurs de ses parties soient souvent contraintes de se détourner parce qu'elles en rencontrent d'autres en leur chemin. Cette règle dépend de ce que Dieu est immuable et conserve le mouvement par une opération très simple.

— La troisième loi que je remarque en la nature est que, si un corps qui se meut et qui en rencontre un autre, a moins de force pour continuer de se mouvoir en ligne droite que cet autre pour lui résister, il perd sa détermination sans rien perdre de son mouvement ; et que, s'il a plus de force, il meut avec soi cet autre corps et perd autant de son mouvement qu'il lui en donne. Ainsi nous voyons qu'un corps dur que nous avons poussé contre un autre plus grand qui est dur et ferme rejaillit vers le côté d'où il est venu et ne perd rien de son mouvement ; mais que, si le corps qu'il rencontre est mou, il s'arrête incontinent, parce qu'il lui transfère tout son mouvement.

On connaîtra mieux la vérité de la première partie de

cette règle si on prend garde à la différence qui est entre le mouvement d'une chose et sa détermination vers un côté plutôt que vers un autre, laquelle différence est cause que cette détermination peut être changée sans qu'il y ait rien de changé au mouvement. Car de ce que chaque chose telle qu'elle est continue toujours d'être en soi simplement et non pas comme elle est en regard des autres, il faut nécessairement qu'un corps qui se meut et qui en rencontre un autre si dur qu'il ne saurait le pousser, perde entièrement la détermination qu'il avait à se mouvoir vers ce côté-là; mais il ne faut point qu'il perde pour cela de son mouvement. D'autant qu'un mouvement n'est point contraire à un autre mouvement plus vite ou aussi vite que soi; et qu'il n'y a contrariété qu'en deux façons seulement, à savoir entre le mouvement et le repos, ou bien entre la vitesse et la tardiveté du mouvement en tant que cette tardiveté participe de la nature du repos; et entre la détermination qu'a un corps à se mouvoir vers quelque côté et la résistance des corps qu'il rencontre en son chemin.

On connaîtra mieux aussi la vérité de la seconde partie de cette règle si on prend garde que Dieu ne change jamais sa façon d'agir et qu'il conserve le monde avec la même action qu'il l'a créé. Car, tout étant plein de corps et néanmoins chaque partie de la matière tendant à se mouvoir en ligne droite, il est évident que dès le commencement que Dieu a créé la matière, non seulement il a mû diversement ses parties, mais aussi qu'il les a faites de telle nature que les unes ont dès lors commencé à pousser les autres et à leur communiquer une partie de leur mouvement; et parce qu'il les maintient encore avec la même action et les mêmes lois qu'il leur a fait observer

en leur création, il faut qu'il conserve maintenant en elles tout le mouvement qu'il y a mis dès lors, avec la propriété qu'il a donnée à ce mouvement de ne pas toujours demeurer attaché aux mêmes parties de la matière et de passer des unes aux autres, selon leurs diverses rencontres; en sorte que ce continuel changement qui est dans les créatures ne répugne en aucune façon à l'immutabilité qui est en Dieu et semble même servir d'argument pour le prouver. »

II

Voilà l'ensemble du système de Descartes; nous allons d'abord le discuter avant d'étudier en détail les règles qu'il en déduit. Les deux premières lois énoncent seulement le principe de l'inertie, elles sont inattaquables. Il n'en est pas de même de la troisième qui renferme l'affirmation que la même quantité absolue de mouvement se conserve. Nous savons déjà que la loi est fausse et que ce n'est pas la somme des valeurs absolues des quantités de mouvement qui est constante, mais la somme algébrique, les vitesses comptées sur une droite étant prises positivement de droite à gauche par exemple et négativement de gauche à droite. Mais il est intéressant d'étudier l'argumentation elle-même de Descartes.

On lit dans un mémoire d'un monsieur Carré, membre de l'Académie, mémoire publié en 1706, le passage suivant : « Il y a eu de grands philosophes et il y en a encore qui soutiennent que Dieu conserve toujours une égale quantité absolue de mouvement dans la nature, parce que tout autre principe leur paraît ne pas pouvoir s'accorder

avec l'immutabilité de Dieu ni avec les lois générales suivant lesquelles il a construit et conservé ce vaste univers; ce qui paraît d'abord très vraisemblable, et il n'y a guère que l'expérience qui en puisse faire voir la fausseté. Mais parce que les expériences sur les corps durs à ressort ne sont pas d'accord avec ce principe, puisque dans une infinité de chocs il y a du mouvement qui se perd et d'autre qui se rétablit; il a fallu en chercher un autre qui ne s'opposât ni à l'immutabilité divine ni aux expériences. »

Nous avons déjà dit combien cette manière de raisonner, si naturelle au XVII[e] siècle, est contraire aux habitudes d'esprit des savants d'aujourd'hui. Il n'y a pas un principe si évident qu'il paraisse qu'on puisse opposer à une expérience bien faite; et, de plus, les savants se soucient infiniment peu de connaître les raisons premières des phénomènes, sachant par l'expérience de l'histoire que c'est un leurre de les chercher. Non qu'ils dédaignent toutes les spéculations des métaphysiciens; mais ils considèrent ceux-ci comme parlant une langue spéciale, les attendent au passage de la théorie à l'application et se donnent le plaisir du spectacle de leur embarras.

Donc les lois du choc ou l'immutabilité divine devaient subir une transformation; c'est Dieu qui céda. Le Révérend Père Malebranche trouva le dénouement du mystère. « Dans cette proposition, dit-il — Dieu conserve toujours dans l'univers une égale quantité de mouvement, — il y a une équivoque qui fait qu'elle est vraie en un sens et fausse en un autre, conforme ou contraire à l'expérience. Elle est vraie en ce sens que le centre de pesanteur de deux ou plusieurs corps qui se choquent se meut toujours de même vitesse avant et après le choc. De sorte qu'il est vrai de dire que Dieu conserve toujours de même part le même

transport de matière. Elle est fausse et contraire à l'expérience prise en ce sens que la quantité absolue de mouvement demeure la même. »

Immédiatement d'ailleurs on tomba d'accord pour reconnaître que cette loi porte « beaucoup plus le caractère des attributs divins. Car le mouvement de tous les corps en général est toujours le même ; tout demeure, pour ainsi dire, dans un parfait et immuable équilibre. Il est clair que Dieu agit toujours de la même manière, avec uniformité, une parfaite simplicité, puisqu'il observe sans cesse cette loi dans les chocs infinis des corps, que leur centre de pesanteur demeure au repos, ou se meuve toujours, nonobstant le choc, avec la même vitesse ; et par conséquent qu'il y ait toujours dans toutes les parties de l'univers prises ensemble le même mouvement et la même force ».

Il y a fort à parier que, si l'expérience avait indiqué une autre loi, on aurait trouvé qu'elle exprime remarquablement la sagesse et les autres attributs du créateur.

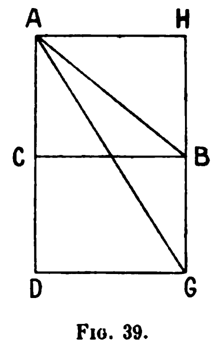


Fig. 39.

Laissons donc tous ces raisonnements, qui sont des curiosités historiques, et discutons les difficultés qui sont les conséquences nécessaires du principe de la conservation de la quantité absolue du mouvement.

En premier lieu, il y a contradiction entre ce principe et les règles de la composition des mouvements. Un mouvement AB (*fig.* 39) peut être remplacé par deux mouvements AH et AC qui sont les deux côtés d'un parallélogramme dont le mouvement AB est la diagonale. Car il est évident

que, si le mobile A décrit en un certain temps la droite AH sur un plan mobile qui se déplace de lui-même dans le même temps de la longueur AC, il parviendra au bout de ce temps au point B. Mais il est non moins évident que $AB < AH + AC$ et que, puisque nous pouvons représenter au point A les vitesses par l'espace qu'elles feraient parcourir au mobile dans l'unité de temps, la conservation de la quantité absolue de mouvement n'a pas lieu dans le remplacement de la vitesse AB par ses composantes AH et AC.

Or, Descartes connaissait parfaitement ces conséquences; il s'en est tiré par de subtiles distinctions absolument inadmissibles. Car, et c'est là un fait entièrement remarquable, toute sa *Dioptrique*, qui est peut-être son œuvre la plus parfaite, est basée sur cette décomposition des vitesses dont il niait implicitement la possibilité.

« Il faut remarquer, dit-il, dans sa *Dioptrique*, que la détermination à se mouvoir vers quelque côté peut, aussi bien que le mouvement et généralement que toute autre sorte de quantité, être divisée en toutes les parties desquelles on peut imaginer qu'elle est composée. Et on peut imaginer que la détermination à se mouvoir de la balle qui se meut de A à B est composée de deux autres dont l'une la fait descendre suivant AC, et l'autre aller à gauche suivant AH. »

Naturellement on se demanda pourquoi Descartes employait cette expression : « détermination à se mouvoir » ; et Hobbes, dans une critique de la *Dioptrique*, dit qu'il aurait mieux valu, « au lieu de la détermination, dire le mouvement déterminé ».

Descartes se défendit avec d'autant plus de soin qu'il sentait que son système entier en dépendait. « Bien qu'on

puisse dire, écrit-il au Père Mersenne, en 1641, que la vitesse de la balle qui va de A en B soit composée de deux autres vitesses, à savoir celle de A vers H et celle d'A vers C, j'ai cru devoir m'abstenir de cette façon de parler, de peur que par là l'on en vînt à entendre que, dans le mouvement ainsi composé, la quantité de ces vitesses et la proportion de l'une à l'autre demeurent, ce qui n'est nullement vrai. Car, si cela était, si nous supposions, par exemple, qu'une balle fût mue d'A vers la droite avec 1 degré de vitesse et de haut en bas pareillement avec 1 degré : elle parviendra en B avec 2 degrés de vitesse, dans le même temps qu'une autre balle qui serait aussi mue de A vers la droite avec 1 degré et de haut en bas avec 2 degrés parviendra en G avec 3 degrés de vitesse ; d'où il arriverait que la proportion de la ligne AB à la ligne AG serait comme 2 à 3, laquelle est toutefois comme 2 à $\sqrt{10}$, etc. »

Hobbes, et en cela il avait raison, ne fut pas très convaincu par cette réponse, qui suppose implicitement ce qu'il fallait démontrer, la nécessité de la conservation de la quantité absolue de mouvement. Il répond par un raisonnement très compliqué auquel Descartes déclare ne rien comprendre. Descartes reproche entre autres choses à Hobbes de composer des déterminations à se mouvoir avec des mouvements déterminés entre lesquels il faut pourtant

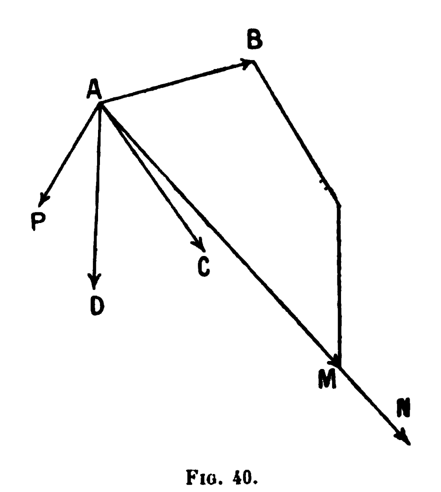


Fig. 40.

avouer qu'on ne saisit pas très bien de différence. Si l'argumentation de Descartes a un sens, il ne peut être que le suivant : Soient plusieurs déterminations à se mouvoir AB, AC, AD (*fig.* 40). Composons-les suivant la règle du parallélogramme : nous obtenons ainsi une direction AM sur laquelle, pour avoir le mouvement vrai, nous devons prendre une longueur non pas égale à AM, mais bien à $AN = AB + AC + AD$. Voilà où commence la difficulté ; la vitesse réelle est donc dirigée suivant AM et égale à AN. Supposons que le mobile, déjà parti pour gagner le point N, reçoive alors une nouvelle détermination AP ; comment composerons-nous ce mouvement réel AN et cette détermination ? C'est ce que Descartes a oublié de nous dire. On peut résumer ce qui précède en quelques mots : la composition des mouvements cesse d'être indépendante de l'ordre dans lequel on les compose. Et Descartes n'a jamais pu se tirer de cet embarras.

III

On peut envisager la question sous une forme un peu plus générale qui nous amène à parler des quantités vectorielles et scalaires.

Il existe deux sortes de grandeurs. Les unes sont des quantités numériques ordinaires, généralisées en ce sens que par convention elles peuvent se trouver précédées du signe + ou du signe —. Ces signes ne font pas entre les quantités numériques des différences qualitatives, mais servent à les grouper en deux séries admettant comme origine commune le 0 et divergeant dans les deux sens. Ces quantités portent le nom de scalaires, parce qu'on peut les con-

cevoir comme formant les degrés d'une échelle qui s'étendrait en ligne droite depuis les quantités négatives très grandes jusqu'aux quantités positives très grandes. Un mobile se déplacerait sur cette échelle et servirait d'index, désignant par sa position la quantité scalaire, autrement dit, la valeur du scalar. La direction que l'échelle pourrait occuper dans l'espace n'importe pas ; la valeur du scalar en est indépendante. Quand nous disons que l'énergie potentielle d'un corps est 20 kilogrammètres, nous avons tout dit; l'énergie potentielle, étant un scalar, est complètement définie.

Les autres quantités qu'on rencontre en mécanique sont appelées vectorielles; ce sont des vecteurs. Elles ont les attributs de la droite; elles sont définies non seulement par leur longueur, mais par leur direction. A l'aide d'un vecteur, nous voyageons à partir de l'origine A du vecteur jusqu'à son extrémité B (*fig.* 41). C'est « un véhicule qui transporte un certain point mobile de A en B, en décrivant cette droite AB ». Par essence le vecteur représente un déplacement fini dans l'espace. Une quantité de mouvement est un vecteur, c'est-à-dire une quantité dirigée : il ne suffirait pas de poser que la quantité de mouvement est tel nombre, pour qu'elle soit complètement définie ; il faut ajouter les éléments nécessaires pour déterminer la direction du vecteur.

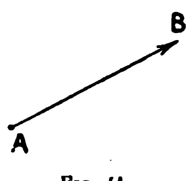


FIG. 41.

Parmi les scalars fondamentaux, nous citerons la force vive, le travail, la chaleur, les potentiels; parmi les quantités vectorielles, les vitesses, les quantités de mouvement, les accélérations, les forces, les intensités des champs électriques ou magnétiques.

Cela posé, il devient évident qu'un principe de conservation aura un énoncé tout différent s'il s'applique à des quantités scalaires ou à des quantités vectorielles.

. Puisqu'il est de l'essence d'un scalar d'être complètement connu par sa valeur numérique précédée de son signe, dire que des quantités scalaires se conservent revient à dire que leur somme algébrique est constante. Au contraire, pour les quantités dont c'est l'essence d'être dirigées, un principe de conservation implique que la résultante des vecteurs ait une longueur et une direction constantes. Bien entendu, le problème est encore indéterminé, puisque nous n'avons pas encore dit comment se déterminerait la résultante des vecteurs.

Nous avons déjà rencontré certains vecteurs — les forces ; — nous avons traité de leur composition et montré que la résultante de deux vecteurs ayant une même origine est la diagonale du parallélogramme construit sur ces vecteurs comme côtés; mais de ce qu'une telle règle s'applique aux forces, il ne s'ensuit pas qu'elle soit générale et nécessaire, ou du moins il faut préciser à quelles conditions elle s'impose. Nous allons entrer dans quelques détails sur les propriétés des opérations algébriques.

Représentons par le signe Ω un opérateur, c'est-à-dire désignons par ce signe le symbole d'une opération. Il pourra signifier, par exemple, l'une des opérations arithmétiques. Soient maintenant des quantités a, b, c quelconques, vectorielles ou scalaires ; une opération entre ces quantités est représentée par le symbole $a\Omega b\Omega c$. L'opération est dite commutative, si on peut poser :

$$a\Omega b\Omega c = a\Omega c\Omega b = b\Omega a\Omega c, \text{ etc.}$$

Exemple : l'addition est commutative, car on a :

$$2+3+5=2+5+3=5+2+3, \text{ etc.}$$

L'opération est dite associative, si on peut poser :

$$a\Omega b\Omega c = a\,(\Omega b\Omega c) = (a\Omega b)\,\Omega c.$$

Exemple : l'addition est associative, car on a :

$$2+3+5=2+(3+5)=(2+3)+5.$$

La multiplication est associative, car on a :

$$2\times3\times5=2\times(3\times5)=2\times15.$$

Nous pouvons maintenant nous proposer la recherche d'une opération associative et commutative appliquée à des vecteurs. Or, nous n'en trouvons qu'une seule que nous appellerons addition et qui consiste précisément à prendre pour somme de deux vecteurs la diagonale du parallélogramme construit sur ces vecteurs comme côtés. La soustraction rentre dans cette opération à la condition de prendre le vecteur à soustraire en sens contraire en lui conservant sa longueur et de lui appliquer la règle précédente d'addition. Voilà pour quelle raison générale la règle de Descartes devait conduire à des résultats ne satisfaisant pas au principe de l'associabilité et de la commutabilité.

On voit maintenant avec quelles règles générales le principe de Descartes est en contradiction : d'abord, c'est un principe de conservation entre quantités vectorielles,

dans lequel elles sont traitées comme des quantités scalaires; de plus, les opérations que ce principe suppose implicitement ne sont ni associatives ni commutatives.

IV

Des lois qu'il pose, Descartes déduit une série de règles; quelques-unes sont des conséquences nécessaires des lois, d'autres en sont indépendantes.

On suppose en général : 1° ou bien que les corps sont ou parfaitement durs ou parfaitement mous, c'est-à-dire qu'ils sont incapables de changer de figure par le choc, ou que, s'ils en changent, ils ne reprennent point celle qu'ils avaient auparavant, en un mot, qu'ils sont sans ressort : car un corps à ressort n'est ni parfaitement dur, ni parfaitement mou, puisqu'il reprend ensuite sa première figure; 2° ou bien que les corps sont à ressort parfait, c'est-à-dire qu'ils reprennent exactement leur figure première. Descartes suppose, au contraire, que les corps parfaitement durs sont à ressort parfait : c'est donc dans cette hypothèse qu'il faut juger ses règles. Son erreur (d'ailleurs fort excusable, car les idées sur l'élasticité au commencement du XVIIe siècle étaient des plus sommaires) provient de ce qu'il confond les deux sens du mot élastique.

On lit dans une lettre de 1641 : « Je demeure bien d'accord que la portion de la terre sur laquelle tombe une balle cède et prête tant soit peu, comme aussi que la partie de la balle qui touche la terre se recourbe un peu en dedans; mais je soutiens que le bond qu'elle fait est toujours plus empêché de ce que la balle et la terre cèdent

l'une et l'autre, qu'il n'est aidé de leur ressort. Il est incroyable et contre le sens commun qu'on puisse dire que, si la terre et la balle étaient si dures qu'elles ne pussent en aucune façon prêter ou se courber en dedans, il ne se ferait aucune réflexion. »

Mais ce n'est pas seulement parce que la balle et la terre cèdent (sont élastiques au sens vulgaire du mot) qu'il y a rebondissement, c'est parce qu'après avoir cédé elles ont plus ou moins le pouvoir de reprendre leur forme primitive (sont élastiques au sens scientifique du mot).

Fig. 42.

Rappelons, pour faciliter les comparaisons, les formules que nous avons démontrées au chapitre précédent. Les corps sont A et B, v et V leurs vitesses, m et M leurs masses; le premier va de gauche à droite, le second de droite à gauche. Si les corps sont sans ressort, la vitesse après le choc est commune, dirigée vers la droite et égale à :

$$u = \frac{mv - MV}{m + M}.$$

Si les corps sont à ressort parfait, la vitesse est pour le corps A vers la gauche :

$$w = \frac{(M - m)v + 2MV}{m + M};$$

pour le corps B vers la droite :

$$W = \frac{(m - M)V + 2mv}{m + M}.$$

On se souviendra que toute vitesse comptée négativement doit être prise en sens inverse.

Par exemple, si w est négatif, le point A après le choc va vers la droite ; de même si W est négatif, le point B après le choc se dirige vers la gauche.

RÈGLES DE DESCARTES

I. — La première est que, si deux corps B et C étaient exactement égaux et se mouvaient d'égale vitesse en ligne droite l'un vers l'autre, lorsqu'ils viendraient à se rencontrer, ils rejailliraient tous deux également et retourneraient chacun vers le côté d'où ils seraient venus, sans perdre rien de leur vitesse ; car il n'y a point en cela de cause qui la leur puisse ôter, mais il y en a une fort évidente qui les doit contraindre de rejaillir et, parce qu'elle serait égale en l'un et l'autre, ils rejailliraient tous deux en même façon.

Cette règle est vraie pour les corps à ressort ; les formules donnent en effet $w = v = V$, $W = v = V$. Leibnitz la trouve même manifeste d'elle-même. Cette règle est à la rigueur fausse, puisque, ainsi que nous l'avons fait remarquer, les corps absolument durs sont sans ressort et, par conséquent, ne peuvent rejaillir. On trouve en effet dans ce cas $u = o$.

II. — La seconde règle est que, si B était tant soit peu plus grand que C et qu'ils se rencontrassent avec la même vitesse, il n'y aurait que C qui rejaillirait vers le côté d'où il serait venu et ils continueraient par après leur mouvement tous deux ensemble vers ce même côté ; car,

B ayant plus de force que C, il ne pourrait être contraint par lui de rejaillir.

III. — La troisième que, si ces deux corps étaient de même grandeur, mais que B eût tant soit peu plus de vitesse que C, non seulement après s'être rencontrés C seul rejaillirait et ils iraient tous deux ensemble comme devant, vers le côté d'où C serait venu, mais aussi il serait nécessaire que B lui transférât la moitié de ce qu'il aurait de plus de vitesse, à cause que, l'ayant devant soi, il ne pourrait aller plus vite que lui; car il lui est plus aisé de communiquer de ses degrés de vitesse à C qu'il n'est aisé à C de changer le cours de tout le mouvement qui est en B.

Il est extraordinaire que Descartes ait pu énoncer des lois aussi fausses, bien entendu en admettant avec lui que des corps parfaitement durs sont à ressort : car, puisque, lorsqu'il y a égalité parfaite entre les masses et les vitesses, les corps rejaillissent, il est contraire à tous les principes de continuité que le rejaillissement cesse dès que les masses ou les vitesses deviennent tant soit peu différentes. Effectivement les formules nous apprennent que les corps continuent à rejaillir : dans le cas où les masses sont tant soit peu inégales, c'est la plus faible qui rejaillit avec le plus de vitesse; si ce sont les vitesses qui diffèrent, les masses étant alors rigoureusement égales, il y a simplement échange des vitesses, de sorte que tout se passe comme si le choc n'avait pas eu lieu. Il se trouve même que dans ce dernier cas la quantité absolue de mouvement se conserve, et Descartes aurait naturellement été amené à énoncer cette règle si ses idées sur la dynamique n'avaient été faussées par une conception singulière de la

force des corps, conception dont la quatrième règle va nous donner la clef.

IV. — La quatrième règle est que, si le corps C était tant soit peu plus grand que B, et qu'il fût entièrement au repos, c'est-à-dire que non seulement il n'eût point de mouvement apparent, mais aussi qu'il ne fût point environné d'air, ni d'aucun autre corps liquide (lesquels disposent les corps durs qu'ils environnent à pouvoir être mus fort aisément), de quelque vitesse que B pût venir vers lui, jamais il n'aurait la force de le mouvoir, mais il serait contraint de rejaillir vers le même côté d'où il serait venu, car, d'autant que B ne saurait pousser C sans le faire aller aussi vite qu'il irait soi-même par après, il est certain que C doit d'autant plus résister que B vient plus vite vers lui et que sa résistance doit prévaloir à l'action de B, à cause qu'il est plus grand que lui. Ainsi, par exemple, si C est double de B et que B ait 3 degrés de mouvement, il ne peut pousser C, qui est au repos, si ce n'est qu'il lui transfert 2 degrés, savoir 1 pour chacune de ses moitiés, et qu'il retienne seulement le troisième pour soi, à cause qu'il n'est pas plus grand que chacune des moitiés de C et qu'il ne peut aller plus vite qu'elles. Tout de même, si B a 30 degrés de vitesse, il faudra qu'il en communique 20 à C; ainsi toujours le double de ce qu'il retiendra pour soi. Mais, puisque C est au repos, il résiste dix fois plus à la réception de 20 degrés qu'à celle de 2; en sorte que d'autant plus B a de vitesse, d'autant plus trouve-t-il en C de résistance; et, parce que chacune des moitiés de C a autant de force pour demeurer en son repos que B n'a pour la pousser et qu'elles lui résistent toutes deux en même temps, il est évident qu'elles doivent prévaloir à le

contraindre à rejaillir. De façon que, quelle que soit la vitesse de B vers C au repos et plus grand que lui, jamais il ne peut avoir la force de le mouvoir.

L'erreur de Descartes est excessivement intéressante. Les corps résistent à tout changement de vitesse, et cette force de résistance, qui fait équilibre à chaque instant aux forces statiquement non équilibrées du système, nous l'avons désignée sous le nom de force d'inertie. Descartes ne dit pas autre chose; mais, au lieu d'imaginer que la force agit peu à peu et de prendre alors pour mesure le produit de la masse par l'accélération, c'est-à-dire le taux par seconde du changement de vitesse; il admet que la force agit instantanément et se trouve conduit à prendre pour sa mesure le produit de la masse par le changement total de vitesse, et, puisque le corps part du repos, le produit de la masse par la vitesse, en d'autres termes la quantité de mouvement gagnée par le corps. Ce qui revient en définitive à confondre l'impulsion avec la force. Nous savons d'ailleurs combien de temps on a mis à établir cette distinction fondamentale.

Mais, ce point admis, Descartes n'aurait pas dû conclure comme il le fait. Dira-t-on qu'un homme ne peut acheter une maison de 100,000 francs parce que, la maison payée, il ne lui restera plus que 10,000 francs pour toute fortune? Descartes cependant fait un raisonnement analogue. Tout ce qu'il pouvait conclure de ses prémisses, c'est que le corps B, après avoir poussé le corps C, doit avoir perdu une quantité de mouvement égale à celle que le corps C a gagnée; ce qui revenait à poser l'égalité entre la force perdue par B et la force gagnée par C : c'était la conséquence nécessaire et logique de son grand principe de la conservation de la quantité absolue de mouvement. Ceux qui,

avec Montucla, prétendent donc que Descartes ne s'est trompé que pour avoir trop servilement obéi à ses principes sont eux-mêmes dans l'erreur, puisque cette quatrième règle, notoirement absurde, est en contradiction avec les trois lois fondamentales.

Descartes n'ignorait pas que sa quatrième règle était en opposition avec l'expérience la plus vulgaire; il suffit de suspendre un corps de manière à supprimer les frottements pour s'apercevoir que le choc d'un corps aussi petit qu'on voudra lui communique une certaine vitesse. On peut reproduire aisément l'expérience en plaçant un corps léger sur un liquide et en poussant contre lui un corps plus petit. Pour lever la contradiction, Descartes inventa une théorie encore plus extraordinaire que la précédente, par laquelle les fluides, loin de gêner les mouvements des corps, les facilitent en quelque sorte au moment du choc. Cette théorie revient, au fond, à admettre que les parties fluides sont en mouvement, mais que l'action totale de leurs chocs contre le corps est nulle : la présence d'un autre corps qui bute sur le premier détruit l'équilibre, de sorte que le corps ne reçoit pas son mouvement de la seule force extérieure, mais aussi et principalement du fluide qui l'environne. Tout cela n'a absolument aucun sens.

Il est curieux de savoir par quelles hésitations Descartes a passé, avant d'en arriver à énoncer la quatrième loi et son scolie. Dans une lettre de 1633, on lit ce passage : « Si on suppose qu'un poids poli, étant traîné sur un plan horizontal, ne le touche qu'en un seul point, et que l'air n'empêche point du tout son mouvement, la moindre force sera suffisante pour le mouvoir, tant grand qu'il puisse être. » En 1638, il écrit : « Je ne reconnais aucune inertie ou tardiveté naturelle dans les corps et crois que, lors

seulement qu'un homme se promène, il fait tant soit peu mouvoir toute la masse de la terre, à cause qu'il en charge maintenant un endroit et, après, un autre. Mais je ne laisse pas de penser que les plus grands corps étant poussés par une même force, comme les plus grands bateaux par un même vent, se meuvent toujours plus lentement que les autres. » En 1639, ses opinions n'ont pas encore varié. « Premièrement, dit-il, je tiens qu'il y a une certaine quantité de mouvement en toute matière créée qui n'augmente ni ne diminue jamais ; et ainsi, lorsqu'un corps en fait mouvoir un autre, il perd autant de son mouvement qu'il lui en donne. Comme lorsqu'une pierre tombe d'un lieu haut contre terre, si elle ne retourne pas et qu'elle s'arrête, je conçois que cela provient de ce qu'elle ébranle cette terre et ainsi lui transfère son mouvement. Mais, si ce qu'elle meut de terre contient mille fois plus de matière qu'elle, en lui transférant tout son mouvement, elle ne lui donne que la millième partie de sa vitesse. Et, pour ce que si deux corps inégaux reçoivent autant de mouvement l'un que l'autre, cette pareille quantité de mouvement ne donne pas tant de vitesse au plus grand qu'au plus petit, on peut dire en ce sens que plus un corps contient de matière, plus il a d'inertie naturelle. »

Il est fort regrettable qu'il n'ait pas persévéré plus longtemps dans cette voie ; il aurait rencontré une partie de la vérité et aurait appliqué plus conséquemment ses principes.

V. — La cinquième règle est que, si au contraire le corps C était tant soi peu moindre que B, celui-ci ne saurait aller si lentement vers l'autre, lequel je suppose encore parfaitement en repos, qu'il n'eût la force de le

pousser et de lui transférer la partie de son mouvement qui serait requise pour faire qu'ils allassent par après de même vitesse.

VI. — La sixième règle est que, si le corps C était en repos et parfaitement égal en grandeur au corps B qui se meut vers lui, il faudrait nécessairement qu'il fût en partie poussé par B et qu'en partie il le fît rejaillir. En sorte que, si B était venu vers C avec 4 degrés de vitesse, il faudrait qu'il en communique un, et qu'avec les 3 autres il retournât vers le côté d'où il serait venu. Car, étant nécessaire ou bien que B pousse C sans rejaillir et ainsi qu'il lui transfère 2 degrés de son mouvement, ou bien qu'il rejaillisse sans le pousser et que par conséquent il retienne ces 2 degrés de vitesse, avec les 2 autres qui peuvent lui être ôtés, ou bien qu'il rejaillisse en retenant une partie de ces 2 degrés et qu'il le pousse en transférant l'autre partie; il est évident que, puisqu'ils sont égaux, et qu'ainsi il n'y a pas plus de raison pourquoi il doive rejaillir que pousser C, ces deux effets doivent être également partagés.

Appliquons nos formules aux trois cas précédents; il suffit d'y faire $V = o$; elles deviennent :

$$w = \frac{(M - m)v}{m + M} \quad W = \frac{2mv}{m + M}.$$

Donc, en tous cas, le corps au repos C est poussé et avec une vitesse d'autant plus grande que la vitesse du corps B est plus grande.

Dans le cas de la règle VI, où les masses sont égales $M = m$, $w = o$; le mouvement se transmet purement et simplement du corps B qui s'arrête au corps C. On le

démontre bien aisément à l'aide d'une série de boules d'ivoire ABCD (*fig.* 43), suspendues aux points fixes *abcd*. Si on soulève la boule A et qu'on la laisse retomber, les trois boules ABC restent au repos et la boule D continue l'oscillation commencée par la boule A.

Dans le cas de la règle IV, $M > m$, w est positif, il y a rejaillissement. Dans le cas de la règle V, $M < m$, w est négatif, il n'y a pas rejaillissement.

VII. — La septième et dernière règle est que, si B et C vont vers un même côté et que C précède, mais aille plus lentement que B, en sorte qu'il soit atteint par lui, il peut arriver que B transférera une partie de sa vitesse à C pour le pousser devant soi, et il peut arriver aussi qu'il ne lui transférera rien du tout, mais rejaillira avec tout son mouvement vers le côté d'où il sera venu. Descartes donne alors un critérium qui se ramène au suivant. Soient toujours M et m les masses des corps C et B, v et V leurs vitesses en valeurs absolues.

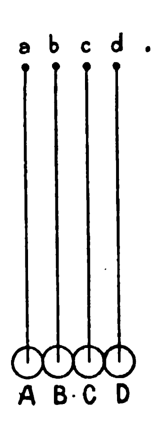


Fig. 43.

Si $mv < MV$, il y a rejaillissement. Si $mv > MV$, le corps B ne rejaillit pas, mais il doit pousser C en lui transférant une partie de sa vitesse, et ainsi après le choc ils se meuvent de conserve. Enfin, si $mv = MV$, B doit transférer une partie de son mouvement à l'autre et rejaillir avec le reste.

Il semble que les règles IV, V, VI, ne soient qu'un cas particulier de la septième; car il suffit de supposer dans l'application de cette dernière que la vitesse du corps C est nulle, $V = o$ pour retomber sur les précédentes, et

pourtant on obtient, à partir de la règle VII, des résultats contradictoires avec les IV, V, VI.

« Et les démonstrations de tout ceci sont si certaines, conclut Descartes, qu'encore que l'expérience nous semblerait faire voir le contraire, nous serions néanmoins obligés d'ajouter plus de foi à notre raison qu'à nos sens. » Curieuse persuasion qui doit singulièrement donner à réfléchir.

CHAPITRE XI

DES FORCES VIVES ET DE LA FORCE DES CORPS

I

Nous avons ramené, dans le chapitre VI, la mécanique entière à l'application du seul principe des vitesses virtuelles, en considérant comme appliquées au système non seulement les forces mesurables par leurs effets statiques, mais encore les forces d'inertie ; ces forces, qui représentent la résistance des corps au mouvement, ont pour expression mathématique un vecteur égal en longueur au produit de la masse par l'accélération, dont la direction est celle de l'accélération, mais dont le sens est contraire. Le principe fondamental, dit d'Alembert sous la forme donnée par Lagrange, s'énonce ainsi : Les travaux des forces dont la mesure est statique et des forces d'inertie sont égaux en valeur absolue, mais l'un résiste quand l'autre agit.

On peut donner aux travaux des forces d'inertie une autre expression que nous allons calculer dans le cas particulier des forces de la pesanteur. Si un corps commence sa chute au temps o avec une vitesse initiale v_0, et si g est l'accélération, au bout d'un temps t de chute, la vitesse est $v = v_0 + gt$, et l'espace parcouru est $e = v_0 t + \frac{1}{2} gt^2$. Calculons l'expression suivante $\frac{mv^2 - mv_0^2}{2}$.

Nous trouvons aisément qu'elle est égale à $mv_0gt + \frac{1}{2}mg^2t^2$.

Remplaçons, dans l'expression du travail de la pesanteur mge, e par sa valeur, il vient $mge = mv_0gt + \frac{1}{2}mg^2t^2$.

On a donc $mge = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$.

Le produit $\frac{mv_1^2}{2}$ de la masse par la moitié du carré de la vitesse s'appelle force vive. Nous pouvons donc énoncer le résultat précédent en disant que le travail de la pesanteur est égal à la variation de la force vive. Ce résultat, que nous venons de démontrer dans le cas de la pesanteur, est absolument général. Soit T_{AB} le travail des forces mesurées par leurs effets statiques quand on passe de l'état A à l'état B du système; soit U_A la somme des forces vives de tous les points du système dans le premier état, U_B la somme des forces vives de tous les points dans le second ; on démontre que l'on a généralement :

$$T_{AB} = U_B - U_A.$$

Nous avons vu qu'un ensemble de forces est dit avoir un potentiel par rapport à un système de corps quand leur travail reste le même dans le passage du système d'une première position A à une seconde position B, quelles que soient les trajectoires parcourues par les différents points du système. Mais ce n'est là qu'une vue assez superficielle, et il est temps de généraliser nos idées. On conçoit que, si la position dans l'espace des masses qui composent un système le définit complètement dans certains cas, souvent la position des masses est presque indifférente, et l'état de ces masses importe bien plus. Quand un

gramme d'hydrogène s'unit avec huit d'oxygène, il est singulièrement plus utile de considérer l'état initial et l'état final des corps en présence que leur situation par rapport à un plan horizontal. — Laissant donc nos premières définitions, très claires, mais pas assez profondes, nous dirons qu'un ensemble de forces a un potentiel, par rapport à un système quand leur travail reste le même dans le passage du système d'un premier état A à un second état B, quels que soient les états intermédiaires traversés par les différentes parties du système.

Or, indépendamment de sa position dans l'espace, l'état d'une *petite masse* peut être caractérisé par exemple par sa vitesse; c'est même là un état d'une définition très simple, puisque la nature chimique de la petite masse n'est pas modifiée.

Mais la définition de l'état d'un système est un peu plus complexe. Tandis que, par exemple, on peut définir l'état d'une seule masse par sa vitesse, et qu'il n'y a ainsi, à proprement parler, qu'une série infinie d'états possibles ; s'il s'agit de deux corps, il y aura une infinité de séries possibles, puisqu'il suffit de donner à une des masses une vitesse arbitraire, et à l'autre la série infinie des vitesses pour avoir une première infinité d'états ; à chaque vitesse arbitraire du premier corps correspond ainsi une infinité d'états du système et, par conséquent, il en existe en tout une infinité d'infinités. Et ainsi de suite, à mesure qu'augmente le nombre des masses du système. Mais on conçoit que, sous un point de vue particulier, plusieurs de ces combinaisons soient équivalentes. De même que l'on peut payer une même somme d'un grand nombre de manières en employant des monnaies de valeurs différentes, sans pour cela que le total se trouve modifié, et

que la valeur marchande de cette réunion de pièces ne soit ni augmentée ni diminuée : ainsi, pour les vitesses, nous pouvons caractériser un des états du système, non plus par les valeurs individuelles des vitesses des différentes masses, mais par la somme des forces vives de chacune des masses. Soit m_1, m_2, m_3, etc., ces masses v_1, v_2, v_3, etc., les vitesses correspondantes; nous définirons l'état du système par l'expression :

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_3 v_3^2}{2} + \text{etc.}$$

que nous appellerons, pour abréger, énergie actuelle. Cela veut dire qu'au point de vue particulier où nous nous plaçons il ne nous importe pas de savoir quelles sont les vitesses individuelles des masses prises isolément, mais simplement la valeur totale de la somme ci-dessus, de cette énergie actuelle.

Et, pour en revenir enfin à notre point de départ, nous disons, par rapport à cette énergie, à cet état choisi, qu'un système de forces a un potentiel, si le travail de ces forces reste le même quand on passe d'une certaine valeur U_A de l'énergie actuelle, c'est-à-dire de l'état A, à une autre valeur U_B de cette énergie, c'est-à-dire à l'état B, quels que soient les états intermédiaires, c'est-à-dire les valeurs U prises successivement par l'énergie.

Ceci posé, nous pouvons enfin énoncer le théorème remarquable suivant : les forces d'inertie admettent un potentiel qui est l'énergie actuelle. En effet, le principe fondamental de la dynamique a pour énoncé : $t_{AB} + T_{AB} = 0$, en appelant t_{AB} le travail des forces d'inertie. Or : $T_{AB} = U_B - U_A$. Donc : $t_{AB} = U_A - U_B$, ce qui démontre le théorème.

Quand des forces admettent un potentiel, le travail positif exécuté par les forces est numériquement égal au décroissement de ce potentiel. Pour employer une expression plus concrète, si le travail que peuvent fournir les forces est déjà actuellement représenté sous une certaine forme que nous avons appelée énergie potentielle, le travail effectué par les forces quand on passe de la position A à la position B est égal à la diminution de cette énergie et a pour expression $T_{AB} = E_A - E_B$. L'énergie actuelle n'est donc pas autre chose que l'énergie potentielle des forces d'inertie. Quand la force vive diminue, le travail des forces d'inertie est positif et représenté numériquement par cette diminution. Voici quelques conséquences de ce nouvel énoncé.

Tout d'abord, si les forces qui agissent sur le système sont nulles, ou ont un travail nul, $T_{AB} = o$. Donc $U_B = U_A$, et les valeurs de l'énergie actuelle sont les mêmes pour le premier et le second état. Or, il existe une circonstance très importante où nous sommes sûrs *a priori* que le travail des forces est nul, au moins pour un petit déplacement du système à partir d'une position donnée; c'est celui où les forces se font équilibre, c'est-à-dire où le système demeurerait au repos, si on le supposait un instant au repos. D'où le théorème suivant: Quand un système passe par une de ses positions ou formes d'équilibre, l'énergie actuelle ne varie pas : ce qui revient au même, elle passe par un maximum ou un minimum. Cherchons à préciser; nous avons vu que, pour l'équilibre stable, le travail des forces pour un petit déplacement fini, à partir de la position d'équilibre, est négatif. Appelons A la position d'équilibre, B cette position voisine : si l'équilibre est stable, on a $T_{AB} < o$, puisque le travail des forces est résis-

tant, conséquemment $U_B < U_A$: donc l'énergie actuelle passe par un maximum.

Exemple : Un pendule est à l'état d'équilibre stable, si la corde est verticale et le poids en bas ; donc, si le pendule fait des oscillations, le maximum de vitesse correspond au passage par la verticale. Ce même pendule, supposée la tige rigide, a une position d'équilibre instable, lorsque le poids est sur la verticale du point de suspension mais au dessus ; si donc on lance le pendule avec une vitesse suffisante pour qu'il décrive, non plus des va-et-vient, mais des cercles complets, le minimum de la vitesse aura lieu lors du passage supérieur à la verticale.

Ce principe a été énoncé par le marquis de Courtivron, dans l'*Histoire de l'Académie* pour 1749 sous la forme suivante : « Principe nouveau. De toutes les situations que prend successivement un système de corps animés par des forces quelconques et liés les uns aux autres par des fils, par des leviers ou tel autre moyen qu'on veuille supposer, celle où le système a la plus grande somme de produits des masses par le carré des vitesses, c'est-à-dire la plus grande force vive, est la même situation que celle où il le faudrait placer en premier lieu, pour qu'il restât en équilibre. »

Une autre conséquence importante s'applique au cas où les forces mesurées par leurs effets statiques admettent un potentiel ; si l'on veut, s'il leur correspond une énergie potentielle E. Soient E_A et E_B les valeurs de cette énergie dans les situations A et B, on peut poser $T_{AB} = E_A - E_B$. Or, on a aussi $T_{AB} = U_B - U_A$; d'où enfin :

$$E_A - E_B = U_B - U_A, \qquad E_A + U_A = E_B + U_B$$

résultat qui s'énonce de la manière suivante :

La somme de l'énergie potentielle et de l'énergie actuelle est une quantité constante ; si la seconde croît, la première décroît d'autant ; inversement, à une diminution de la première correspond un accroissement de la seconde. Enfin, si on englobe les deux sortes d'énergie sous le même vocable d'énergie, on peut dire que l'énergie d'un système se conserve.

Mais il importe de le redire à satiété ; ce ne sont encore là que des manières de parler. Nous n'avançons, en employant ces formes, rien que de connu ; nous ne faisons qu'énoncer d'une façon rapide et commode le résultat de nos hypothèses fondamentales, à savoir : 1° qu'il y a équilibre dans une situation, lorsque, pour un petit mouvement à partir de cette situation, le travail des forces est nul ; 2° que l'on peut appliquer le même principe aux forces d'inertie. Tout le reste n'est qu'une déduction nécessaire et mathématique, indiscutable une fois les principes admis, et qui ne renferme absolument rien de nouveau. Nous ne sommes pas plus libres de nier ces conséquences que, le postulatum d'Euclide admis, de nier que les trois angles d'un triangle valent deux droits.

II

La notion de force vive est si fondamentale que nous devons insister sur l'historique de sa découverte, afin de payer à Leibnitz, son auteur, un juste tribut d'admiration. Nous allons donc analyser un petit opuscule, *l'Essai de dynamique*, qui résume ses idées. On y rencontre pour

la première fois des démonstrations basées sur l'impossibilité du mouvement perpétuel, principe qui depuis a tant servi dans toutes les branches de la physique.

L'opuscule débute par quelques définitions.

DÉFINITION I. — De la force égale, moindre ou plus grande.

Lorsqu'il y a deux états tellement faits que, si l'un pouvait être substitué à l'autre sans aucune action du dehors, il s'ensuivrait un mouvement perpétuel, on dirait que la force a été augmentée, ou que la force de l'état substitué est plus grande. (Le mot force est pris ici dans le sens d'énergie, ce qui importe peu pourvu qu'on soit prévenu.)

DÉFINITION II. — La quantité de mouvement est le produit de la masse par la vitesse : les masses sont mesurées par les poids.

DÉFINITION III. — Le mouvement perpétuel est impossible. On dit qu'il y a mouvement perpétuel quand le système, partant d'un certain état, revient à ce même état ; et que, sans qu'il y ait eu d'actions extérieures, non seulement le premier état est restitué, mais le système peut produire encore quelque effet. (Cette définition comporte comme cas particuliers la définition vulgaire ; car dans tout mouvement il faut vaincre des frottements ; un système ne peut donc, sans forces extérieures, continuer indéfiniment à se mouvoir sans créer pour ainsi dire de quoi compenser le travail des frottements.)

Axiome I. — La même quantité de force se conserve ; on ne peut substituer l'un à l'autre que des états égaux,

suivant la définition I ; ou, ce qui revient au même, l'effet entier est égal à sa cause.

Axiome II. — Il faut autant de force pour élever une livre à la hauteur de 4 pieds qu'il en faut pour élever quatre livres à la hauteur d'un pied. (Cet axiome montre que le mot force est bien pour Leibnitz l'équivalent du mot travail.)

Postulatum I. — On demande que toute la force d'un corps puisse être transférée sur un autre corps donné ou, du moins, si on suppose cette translation, qu'il n'en arriverait aucune absurdité. On peut imaginer certaines machines pour l'exécution de ces translations de force ; mais, quand bien même on n'en donnerait pas la construction, c'est assez qu'il n'y ait pas impossibilité.

Postulatum II. — On demande que les empêchements extérieurs soient exclus ou négligés comme s'il n'y en avait aucun.

Toutes ces définitions posées, ces axiomes et ces postulats admis, Leibnitz démontre que la force des corps, en langage moderne leur énergie, est mesurée par la force vive et non par quelque autre fonction de la vitesse, telle que la quantité de mouvement. Voici la suite des propositions.

Proposition I. — Les vitesses que les corps pesants acquièrent en descendant sont comme les racines carrées des hauteurs d'où ils descendent, et *vice versa ;* les corps, en vertu des vitesses qu'ils ont, peuvent remonter aux hauteurs d'où ils devraient descendre pour acquérir ces

vitesses, et cela que le corps soit gros ou petit, la chute oblique ou verticale, pourvu qu'on observe la deuxième demande. (Nous connaissons déjà cette proposition ; elle avait été démontrée avant Leibnitz, par Galilée et Huyghens.)

Proposition II (qui peut se déduire de l'axiome II et du postulatum I). — Un corps A pesant une livre, en descendant de la hauteur de 16 pieds, peut élever un corps B pesant 4 livres à une hauteur qui soit tant soit peu moindre de 4 pieds. Cela se prouve par la statique commune. Par exemple, à l'aide d'un fléau de balance dont les bras soient comme de 1 à 4. D'ailleurs, ce n'est pas autre chose que l'énoncé du principe des vitesses virtuelles. Cette proposition est, en plus, générale pour le deuxième axiome.

Proposition III. — Supposez que la quantité de mouvement se conserve toujours, on peut faire en sorte qu'à la place d'un corps de 4 livres avec 1 degré de vitesse, on obtienne un corps d'une livre avec 4 degrés de vitesse. Ce qui résulte de la définition II et du postulat I. Car (postulat I) on peut transporter toute la force de A sur B ; donc, si A seul était en mouvement, B ensuite sera seul en mouvement. Comme rien d'accidentel n'a absorbé quelque chose de force (demande II) il faut que B ait la même quantité de mouvement que A.

Proposition IV. — Supposez qu'à la place de 4 livres avec 1 degré de vitesse on puisse acquérir 1 livre avec 4 degrés de vitesse ; je dis qu'on pourra obtenir le mouvement perpétuel.

Faisons qu'un globe A de 4 livres descende de la hauteur 1 et acquière 1 degré de vitesse. Soit maintenant obtenu qu'à sa place un globe B d'une livre ait 4 degrés de vitesse (hyp.). Le globe B montera à 16 pieds (prop. I); puis, engagé dans une balance et redescendant à l'horizon, il pourra élever A d'une hauteur de 4 pieds (prop. II). Au commencement, A était élevé d'un pied au-dessus de l'horizon, B était sur l'horizon. Maintenant B est sur l'horizon, A est à une hauteur 4. C'est le mouvement perpétuel.

Proposition V. — Supposé que la quantité de mouvement se conserve toujours, on peut obtenir le mouvement perpétuel mécanique. Ce qui résulte immédiatement des propositions III et IV.

On comprend, d'après ces théorèmes, que Leibnitz ait voulu refuser à la quantité de mouvement le nom de force des corps; car, s'il existe quelque chose de mesurable qui caractérise la puissance d'un corps, le propre de ce quelque chose est de pouvoir s'échanger et se conserver; on ne peut admettre ni cet échange, ni cette conservation pour les quantités de mouvement.

Ce travail éliminatoire effectué, on peut alors se demander s'il n'existerait pas quelque autre fonction de la vitesse, qui satisfasse à ces conditions.

Proposition VI. — Un corps de 4 livres de poids et de 1 degré de vitesse a seulement le 1/4 de la quantité de force d'un corps d'une livre de poids et de 4 degrés de vitesse.

Si A (4 livres) monte à 1 pied, B (1 livre) montera à 16 pieds (prop. I).

B monte une livre à 16 pieds: donc 16 livres à un pied (axiome II).

A monte une livre à un pied (hypothèse).

Or, la force d'élever 16 livres à un pied est quadruple de la force d'élever 4 livres à un pied (sens commun). Donc C. Q. F. D.

Proposition VII. — Un corps de 4 livres de poids et de 1 degré de vitesse a la même force qu'un corps d'une livre de poids et de 2 degrés de vitesse. Même démonstration.

Ces propositions jointes montrent que la force des corps est mesurée par le produit de la masse par le carré de la vitesse, en d'autres termes par la force vive.

Voilà toute la dynamique de Leibnitz ; on ne peut dire en moins de mots tant de choses profondes et vraies. S'il prend pour mesure de la force des corps la force vive, c'est qu'elle est immuable, peut s'échanger, correspond absolument à l'idée que nous nous faisons de l'énergie. Il en montre la source dans le travail, et pose comme nécessaire la transformation réciproque du travail et du mouvement. Il montre, enfin, que la quantité de mouvement ne satisfait pas à ces conditions et donne le dernier coup au système de Descartes.

III

C'est en 1686, mais sous une forme moins systématique, que Leibnitz publia ses idées pour la première fois. Dans cet écrit, il reproche aux Cartésiens d'admirer leur maître sans aucun discernement, de remplacer la réflexion par

la tradition, et leur démontre la fausseté de la règle de Descartes. Ce fut le début d'une querelle qui servit assurément à éclaircir les idées que l'on avait alors en dynamique, mais qui devint bientôt une pure dispute de mots.

Une réplique ne se fit pas attendre : elle fut envoyée par un abbé de Conti à la République des Lettres de septembre 1686. Toute l'argumentation se réduit à ceci : « Dans l'exemple de M. de Leibnitz, le corps d'une livre monterait à la hauteur de 4 aunes dans un temps comme 2, et le corps de 4 livres monterait d'une aune dans un temps comme 1. Puisque les temps sont inégaux, il n'est pas étrange qu'on trouve inégales les quantités de mouvement : les forces des deux corps ne sont pas égales. » L'abbé assaisonnait sa critique d'injures dans le goût du temps.

La réponse parut au mois de février 1687; elle est digne du grand philosophe.

« Les Cartésiens, dit-il, prétendent qu'il se garde la même force en somme, qu'ils estiment toujours par la quantité de mouvement. Par exemple, s'il y a un corps de 4 livres d'une vitesse de 1 degré et qu'on suppose que toute sa force doit maintenant être transférée sur un corps d'une livre, n'est-il pas vrai que les Cartésiens prononceront que dans cette supposition il faudra que ce corps reçoive une vitesse de 4 degrés, afin que la même quantité de mouvement soit gardée? Mais selon moi ce corps ne doit recevoir qu'une vitesse 2, de sorte que l'opposition est assez manifeste.

Et, en estimant les forces que les corps ont acquises, ces Messieurs ne se mettent point en peine si elles ont été acquises en un temps long ou court, inégal ou égal. En effet, le temps ne sert de rien à cette estime. Voyant un

corps d'une grandeur donnée aller d'une vitesse donnée, ne pourra-t-on pas estimer sa force sans savoir en quel temps et par quels détours ou délais il a acquis la vitesse qu'il a? Il me semble qu'on peut juger ici sur l'état présent sans savoir le passé. Quand il y a deux corps parfaitement égaux et semblables et qui ont une même vitesse, mais acquise dans l'un par un choc subit, dans l'autre par quelque descente de durée notable, dira-t-on que leurs forces sont différentes? Ce serait comme si on disait qu'un homme est plus riche à qui l'argent a coûté plus de temps à gagner. Mais, qui plus est, il n'est pas nécessaire que les deux corps que j'avais proposés aient parcouru leurs différentes hauteurs en temps inégaux; car, selon qu'on change la ligne de descente, en la rendant plus ou moins inclinée, on peut faire d'une infinité de façons que ces deux corps descendent de leurs différentes hauteurs en temps égaux. »

La question semblait donc complètement élucidée ; Leibnitz avait clairement expliqué sa pensée, ce qu'il entendait par force des corps, en quoi sa définition était plus avantageuse que l'ancienne. Malgré cela, pendant quarante ans, on va ressasser contre lui les mêmes ridicules arguments, et chacun tiendra à honneur de dire son petit mot sur la force des corps. M. de Voltaire lui-même, en 1744, envoie à l'*Académie* un mémoire que M. de Fontenelle n'a pas honte de louer.

D'ailleurs, Fontenelle n'avait pas attendu jusque-là pour donner son avis. Dans l'*Histoire de l'Académie* de 1721, voici en quels termes il traite l'opinion de Leibnitz : « Les plus grands génies ne sont pas incapables de grandes erreurs. Outre le fonds commun à toute la nature humaine, ils peuvent avoir une confiance en eux-mêmes qui, quoique

légitime, en général, et justifiée par un grand nombre de succès, ne manquera guère d'être un principe trompeur dans quelques applications particulières. On va le voir par l'exemple de feu M. Leibnitz qui suffira seul pour consoler les grands hommes tombés dans ce cas. Tous les mathématiciens modernes conviennent que la force des corps est le produit de leur masse par leur vitesse, et l'on ne voit pas que la mesure de la force motrice dût être le carré de la vitesse. Car, d'où viendrait ce carré? Quels seraient les deux effets de la vitesse?

« Cependant, comme nous l'avons dit en 1716, M. Leibnitz prenait pour mesure de la force des corps en mouvement le produit de leur masse, non par la vitesse, mais par le carré de leur vitesse. Sa principale raison et celle qui paraît l'avoir conduit à cette pensée est que, selon le système de Galilée très bien démontré et reçu de tout le monde, un corps poussé de bas en haut avec un degré de vitesse et qui monte par exemple à une toise, monte à 4, s'il est poussé avec 2 degrés, à 9 s'il l'est avec 3. Or, les forces sont comme les espaces qu'elles font parcourir et ces espaces sont comme les carrés des vitesses, donc les forces sont comme les carrés. » Or, ainsi que nous l'avons vu, jamais Leibnitz n'a dit de pareilles absurdités. Il prévient qu'il appelle force des corps quelque chose qui peut se transmettre et qui a pour équivalent un travail accompli ou pouvant être accompli. Mais ce travail le peut être d'une infinité de manières, et ce n'est que dans le cas, tout à fait particulier, d'une force constante et d'un déplacement parallèle à la force que les forces au sens de Leibnitz se trouvent comme les espaces qu'elles font parcourir. D'ailleurs, puisque les corps en mouvement, si rien ne les en empêche, conservent indéfiniment leur vitesse, si

on prend pour force des corps le chemin qu'ils peuvent parcourir, la force des corps est toujours infinie. Assurément la force d'un corps, au sens de Leibnitz, dépend bien de l'espace que le corps peut parcourir, à la condition que, pendant ce parcours, il y ait un travail accompli contre certaines forces.

Les saines idées dynamiques s'étaient tellement obscurcies sous l'influence du principe des vitesses virtuelles mal interprété que de Mairan, dans un fort long mémoire, publié en 1718, dit ce qui suit : « L'effet le plus universellement connu de la force en tant qu'appliquée aux corps, ou en tant qu'on imagine qu'elle y réside après y avoir été appliquée, c'est le mouvement. Force et mouvement ne sont ici que des grandeurs susceptibles de plus ou de moins et par là toujours relatives à quelque terme qui leur doit servir de commune mesure. » Autant d'erreurs que de mots. La force au sens moderne, en tant qu'elle est appliquée à un corps, n'est pas mesurée par la vitesse, mais par les changements dans la vitesse ; en tant qu'elle y réside, c'est-à-dire au sens de Leibnitz, elle n'est pas représentée par la quantité de mouvement ou produit de la masse par la vitesse, puisque cette quantité ne peut pas se transmettre d'un corps à un autre sans changement de valeur. « La force appliquée à un corps, que rien n'empêche de se mouvoir, continue de Mairan, y produit donc du mouvement ; de ce que je conçois un corps en mouvement, je conçois une force qui le fait mouvoir. Ce mouvement peut être uniforme ; comme tel il ne saurait nous indiquer d'autre mesure de la force qui le produit que la simple vitesse du mobile multipliée par sa masse. » Ce passage n'a pas plus de sens que le précédent, car de ce que je conçois un corps en mouve-

ment, je conçois qu'une force l'a mû, dont l'effet total se trouve avoir été la quantité de mouvement, comme nous l'avons vu; mais de là je ne peux rien conclure sur la force qu'il possède actuellement, sur les effets qu'on peut produire avec lui.

IV

Au lieu de discuter ainsi à perte de vue, à savoir s'il paraît évident ou absurde que la force ou l'énergie renfermée dans un corps est proportionnelle à la vitesse ou à son carré, il y avait deux choses plus importantes à faire : 1° vérifier expérimentalement si dans le choc des corps la même quantité de force vive se conserve; 2° vérifier si la force vive donne bien la mesure du travail que peut effectuer un corps. C'est ce qu'on se décida à tenter.

La première vérification, à savoir que dans le choc des corps parfaitement élastiques la même quantité de force vive se conserve, est due à Jean Bernouilli. Dans un fort beau mémoire daté de 1724 et présenté à l'Académie sous le titre suivant : *Discours sur les lois de la communication du mouvement*, il repose la question sur son véritable terrain. Il distingue d'abord nettement de la force vive la force morte, la pression, ce que nous appelons absolument la force : « La seule pression ou la force morte que reçoit un obstacle immobile, dit-il, par l'effort d'un ressort qui cherche à se débander, ne diminue en rien la force (lisez énergie) du ressort, bien loin de l'épuiser. L'air, par exemple, condensé dans un récipient, fait un effort continuel pour se dilater, sans jamais rien perdre de sa force ; parce que les parois du récipient, ne

pouvant céder, ne font que soutenir sa pression, sans affaiblir l'élasticité de l'air. Mais la force du ressort se consume, en donnant du mouvement au corps, c'est-à-dire en produisant une force vive; la production du moindre degré de cette force demande la perte ou la destruction d'un degré égal de la force du ressort (lisez énergie). L'une est la cause; l'autre, l'effet immédiat qui en résulte : or, la cause ne saurait périr en tout ou en partie, qu'elle ne se retrouve dans l'effet à la production duquel elle a été employée.

C'est dans cette égalité que consiste la conservation des forces des corps qui sont en mouvement ; puisqu'il est visible que la plus petite partie d'une cause positive ne saurait se perdre, qu'elle ne reproduise ailleurs son effet, par lequel cette perte soit réparée. M. de Leibnitz est le premier qui a remarqué que cette force n'était point égale au produit de la masse par la vitesse; mais que sa mesure était le produit de la masse par le carré de la vitesse. » On doit conclure de l'idée même de la force vive que la somme en doit rester constante dans le choc, « car elle est quelque chose de si positif, absolu et indépendant, qu'elle resterait dans les corps, quand même le reste de l'univers serait anéanti. Il est donc clair que la force vive d'un corps diminuant ou augmentant à la rencontre d'un autre corps, la force vive de cet autre corps doit en échange augmenter ou diminuer de la même quantité. »

Considéré comme une pure spéculation géométrique, ce théorème avait été démontré par Huyghens ; mais tant s'en faut que la démonstration de Bernouilli soit équivalente. Comme il le remarque très justement, pour Huyghens, ce n'était qu'une vérité stérile, pour lui l'application d'un principe fondamental.

La seconde vérification, à savoir que la force vive donne bien une mesure du travail, avait été tentée même avant Leibnitz par plusieurs méthodes. On faisait tomber un corps d'une certaine hauteur sur une matière molle, capable de céder et de s'enfoncer, comme la cire ou la glaise ; puis, on le faisait tomber d'une hauteur plus grande, quadruple par exemple, sur la même matière ; il n'avait dans le second cas qu'une vitesse double, et cependant l'enfoncement était quadruple. L'astronome Riccioli se servit d'un poinçon dont il notait l'enfoncement dans du beurre.

Voici les nombres qu'il trouva :

Hauteur de la boule	Abaissement du poinçon
8	40
32	115
72	196
128	278

Or, si la boule tombe de 8 pouces et possède 1 de vitesse, tombant de 32 pouces elle en possède 2 ; de 72, elle en possède 3 ; de 128, elle en possède 4. Si la règle de Descartes avait été vraie, les enfoncements auraient été égaux à 40, 80, 120, 160 ; on voit qu'ils sont beaucoup plus grands. L'expérience est, d'ailleurs, assez complexe et ne peut donner des résultats fort exacts.

Enfin, on chercha quelle vitesse devait posséder un corps pour bander une suite de ressorts. Appelons ressorts semblables ceux dont les résistances sont toujours en même rapport pour des ouvertures semblables. Imaginons plusieurs ressorts appuyés les uns contre les autres, ainsi que l'indique la figure 44. Il est d'abord évident qu'il ne faut

pas plus de pression pour bander la suite entière composée d'un nombre quelconque de ressorts que pour en bander un seul ; mais il faut que le point d'application de la pression se déplace d'autant plus qu'il y a plus de ressorts. Donc une pareille suite de ressorts nous permet de dépenser tel travail que nous voulons, puisque le travail dépensé pour bander une suite est proportionnel au nombre des ressorts de la suite. A l'aide de cette proposition, il devenait bien facile de vérifier ou d'infirmer les conclusions de Leibnitz : les expériences furent faites par l'académicien Camus en 1728 ; il montra que le nombre des ressorts bandés par un corps en mouvement était proportionnel au carré de la vitesse, c'est-à-dire à la force vive du corps.

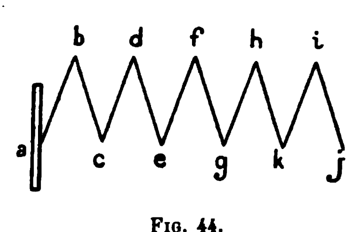


Fig. 44.

V

Un point rendait le principe de Leibnitz difficile à admettre : c'est que l'on savait d'expérience certaine que deux corps mous ou parfaitement durs se rencontrant avec des vitesses en raison inverse de leurs masses ou, si l'on veut, avec des quantités de mouvement égales, s'arrêtent tout net. Puisqu'ils se font ainsi équilibre, ne faut-il pas que leurs forces soient égales ? C'était bien mal interpréter l'idée de Leibnitz ; car les forces, au sens qu'il leur donne, ne peuvent jamais s'équilibrer, puisque ce sont des quantités scalaires essentiellement positives ; elles ne

doivent pas s'annuler, et, si elles paraissent le faire ici, ce n'est qu'en apparence.

Jean Bernouilli leva cette contradiction par une fort remarquable démonstration. Il s'appuie sur les propriétés des ressorts que nous signalons plus haut. Il imagine deux corps A et B (*fig.* 45) de différentes masses, et entre eux une rangée de ressorts égaux ; si on veut, un ressort à boudin homogène. Les corps se touchent d'abord au point C et les ressorts sont bandés. Lorsqu'ils viendront à se débander, les corps seront poussés et prendront, d'après le principe de l'égalité de l'action et de la réaction, des quantités de

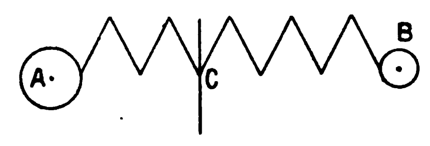


Fig. 45.

mouvement égales. Soient A, B leurs masses, a, b leurs vitesses, on aura $aA = bB$. Non seulement les vitesses définitives, mais les vitesses intermédiaires et par conséquent les espaces parcourus au bout d'un temps quelconque jouissent de cette propriété, on a $\overline{AC}\,A = \overline{BC}\,B$: le rapport $\frac{CA}{CB} = \frac{B}{A}$ est invariable. Or, à chaque instant, les ressorts doivent être également tendus : les nombres de ressorts compris dans les longueurs CA et CB sont donc dans le rapport de ces longueurs, qui est d'après l'équation ci-dessus constant et égal au rapport inverse des masses. Le point C est donc comme un obstacle immobile, contre lequel les ressorts CA et CB se débandent. Dans ces conditions, la force vive communiquée au corps A est fournie par la suite AC, et la force vive fournie au corps B par la

suite BC. Ces énergies sont entre elles comme le nombre des ressorts, c'est-à-dire dans le rapport :

$$\frac{AC}{BC}=\frac{A}{B}=\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\times\frac{Aa}{Bb}=\frac{Aa^2}{Bb^2}$$

puisque $Aa = Bb$. C. Q. F. D.

Réciproquement, si les corps mous ou parfaitement durs se meuvent l'un vers l'autre avec des vitesses réciproques aux masses, leurs vitesses seront annulées par le choc, bien qu'ils ne possèdent pas la même quantité de force vive.

De la démonstration de Bernouilli on déduit la règle du partage des forces vives entre deux corps qui sont mus simultanément par un ressort : par exemple un obus dans un canon. Soient M et m les masses du canon et de l'obus, V et v les vitesses correspondantes au moment où le projectile sort de l'arme. Puisque le gaz de la poudre joue le rôle de ressort et appuie également sur l'arme et l'obus, on doit avoir $MV = mv$.

D'où : $$\frac{MV^2}{mv^2}=\frac{V}{v}=\frac{m}{M}.$$

Les quantités de force vive sont en raison inverse des masses, les quantités de mouvement sont égales. Donc le canon doit reculer et avec une vitesse d'autant plus petite que son poids est plus fort relativement à celui du projectile. En second lieu, presque toute la force vive passe dans l'obus et il en reste d'autant moins dans la masse du canon que cette masse est plus grande. Pour ces deux raisons on a tout intérêt à augmenter la masse du canon. Car : 1° le recul de l'affût est gênant ; 2° la puissance

de destruction d'un corps est mesurée par sa force vive, c'est-à-dire le travail qu'il peut accomplir et non par sa quantité de mouvement; il y a donc avantage à ce que presque toute la force vive disponible se retrouve dans le projectile. Ces considérations expliquent pourquoi l'on peut sans danger résister au recul d'un fusil, et non s'exposer au choc de la balle, bien que les quantités de mouvement du fusil et de la balle soient égales. Admettons que dans un fusil le rapport des forces vives ou de destruction de l'arme et de la balle soit de 1 à 100; la force de destruction de la balle s'exerce sur une surface peut-être cent fois moindre ; la balle produit donc pour une surface donnée un effort de destruction dix mille fois plus grand que celui du recul.

Le principe de Leibnitz s'imposait, et ceux même qui chicanaient sur les mots, se refusant à admettre l'expression de force des corps en mouvement comme synonyme de force vive, étaient forcés de convenir que la force vive représente bien quelque chose d'existant réellement dans les corps. Bien qu'ils reprochassent à Leibnitz de rétablir dans la science de prétendus êtres, des qualités réelles, ils ne pouvaient nier l'application, au moins très générale, du principe de l'équivalence entre le travail et la force vive. Ce fut d'Alembert, en 1760, qui montra que ce principe est la conséquence nécessaire des principes de l'équilibre et de la mesure dynamique des forces par l'accélération qu'elles produisent.

Avec l'étude du principe des forces vives, nous terminons l'étude de la mécanique proprement dite ; on ne peut faire sortir rien de plus des hypothèses fondamentales ; l'œuvre est achevée, les routes sont barrées. A la vérité, on usera peut-être encore bien des siècles à résoudre tel

cas particulier; mais c'est là occupation de mathématiciens, et cela n'a rien à voir avec la philosophie de la science. Au fond la résolution d'un nouveau problème de mécanique n'a qu'un intérêt secondaire et spécial : on peut chercher à approfondir les causes des perturbations des astres, donner des formules plus exactes pour déterminer le cours de la lune, on n'introduira pas dans la science une seule idée nouvelle. La mécanique est une science parfaite; elle peut ne trouver dans les mathématiques qu'une aide incomplète : il suffit qu'elle ait donné la forme générale renfermant tous les cas particuliers; son rôle est achevé.

Mais plus générale que la mécanique dont nous venons de suivre le développement, et qui a abouti, à la fin du siècle dernier, à la mécanique analytique de Lagrange, s'en est constituée une autre, dont le développement dure encore et dont les notions fondamentales même sont encore en pleine évolution. Nous allons consacrer à son étude la fin de ce travail.

CHAPITRE XII

ÉQUIVALENT MÉCANIQUE DE LA CHALEUR

I

Si les idées de Leibnitz sont facilement vérifiables dans un grand nombre de cas, certains phénomènes les contredisent absolument ; et l'on ne s'est pas fait faute, dès le commencement du débat, de les opposer triomphalement au philosophe. Nous citerons à ce propos quelques passages des lettres échangées entre Clarke et Leibnitz. Elles ont cet intérêt historique d'avoir été publiées deux fois, aussitôt la mort de Leibnitz, avec des notes dans lesquelles on s'attache à tourner en ridicule ses opinions.

Leibnitz pose en plusieurs endroits le principe que nous avons étudié, à savoir que la force active (lisez énergie) demeure constante dans l'univers. « Ceux qui s'imaginent, dit-il, que les forces actives se diminuent d'elles-mêmes dans le monde ne connaissent pas bien les principales lois de la nature et la beauté des ouvrages de Dieu. » « Si la force active se perdait dans l'univers par les lois naturelles que Dieu y a établies, en sorte qu'il eût besoin d'une nouvelle impression pour restituer cette force, comme un ouvrier qui remédie à l'imperfection de sa machine ; le désordre n'aurait pas seulement lieu à l'égard de nous, mais à l'égard de Dieu lui-même. »

Clarke répond en disciple de Newton, mais en disciple plus dévoué qu'intelligent ; son argumentation paraît scientifique et au fond ne prouve rien ; Newton peut-être l'aurait désavoué.

« Ce qu'on dit, réplique-t-il, est une simple affirmation sans preuve. Deux corps destitués d'élasticité, se rencontrant avec des forces (lisez quantités de mouvement) contraires et égales, perdent leurs mouvements. » A quoi Leibnitz répond : « On m'objecte que deux corps mous, ou non élastiques concourant entre eux, perdent leur force (lisez énergie) ; je réponds que non. Il est vrai que les touts la perdent par rapport à leur mouvement total ; mais les parties la recouvrent, étant agitées intérieurement par la force du concours. Ainsi ce défaut n'arrive qu'en apparence. Les forces ne sont pas détruites, mais dissipées parmi les parties menues. Ce n'est pas les perdre, mais c'est faire comme ceux qui changent de la grosse monnaie en petite. La quantité de mouvement ne demeure pas la même ; mais j'ai montré ailleurs qu'il y a de la différence entre la quantité de mouvement et la quantité de force. »

Clarke ne se considère pas comme battu : « Mais, lorsque deux corps tout à fait durs et sans ressort perdent de leurs mouvement en se rencontrant, il s'agit de savoir ce que devient ce mouvement, ou cette force active et impulsive ? Il ne saurait être dépensé parmi les parties de ce corps, parce que ces parties ne sont pas susceptibles d'un trémoussement faute de ressort. » Ce qui est mal raisonné parce qu'expérimentalement il n'existe pas de corps tout à fait durs ; on n'en connaît pas dont les parties matérielles puissent être considérées comme rigoureusement au contact. D'ailleurs, deux corps qui ne sont pas mous ne s'arrêtent jamais dans leur rencontre, et c'est même à cause

de ce fait expérimental que Descartes considérait les corps parfaitement durs comme élastiques.

Quoi qu'il en soit, la question était nettement posée ; il nous faut discuter l'interprétation fournie par Leibnitz.

Or, il y a deux parts à faire dans sa théorie.

L'une consiste à affirmer simplement que l'énergie se conserve. Que, si elle diminue sous forme sensible d'énergie actuelle, c'est qu'elle passe sous une autre forme d'énergie actuelle — ou bien qu'elle devient de l'énergie potentielle, qu'elle crée une réserve de travail pouvant être ultérieurement utilisée, — ou bien qu'elle se transforme en une autre sorte d'énergie non encore définie.

L'autre consiste à dire que la force vive disparue doit nécessairement se retrouver dans l'un des deux états actuel ou potentiel et non pas dans quelque autre équivalent. Et conséquemment, lorsqu'il arrive, comme dans le cas du choc des corps mous, que la force vive disparaît apparemment sans qu'aucun travail soit effectué, sans qu'aucune réserve de travail soit créée, il s'ensuit que la force vive disparue doit se retrouver encore sous forme actuelle ou de mouvement dans les parties menues des corps ; qu'elle doit seulement quitter l'état sensible, pour l'état de vibration ou de trémoussement des molécules.

En résumé, non seulement Leibnitz énonce la conservation de l'énergie, mais de plus il limite le nombre des formes possibles de cette énergie.

La seconde proposition est tout à fait arbitraire ; on peut bien, à titre d'hypothèse explicative, admettre que l'énergie actuelle, qui semble disparaître, existe toujours sous forme de mouvement, mais c'est là une conception nullement imposée par l'expérience.

II

Tout en conservant la première partie de l'hypothèse de Leibnitz, pouvons-nous généraliser la seconde? en d'autres termes, existe-t-il, outre les états de travail disponible et de force vive, d'autres modes sous lesquels peut se présenter l'énergie.

La première forme de l'énergie peut être désignée par le nom d'énergie de situation, en ce sens qu'elle dépend de la position de la masse, position absolue dans l'espace ou position relative par rapport à d'autres masses. La seconde peut être désignée sous le nom d'énergie d'état, parce qu'elle est indépendante de la position de la masse, mais a pour cause un état particulier de cette masse qui est la vitesse. Mais, qu'il s'agisse de l'une ou l'autre forme d'énergie, la masse n'a pas à proprement parler d'équivalent mécanique; elle n'en prend un qu'à condition qu'elle soit placée dans une situation donnée ou dans un état donné. Quand donc on s'est proposé de savoir s'il n'existait pas quelque autre forme d'énergie, on a été naturellement conduit à la chercher de même espèce que les formes déjà connues, c'est-à-dire à imaginer une masse dans une certaine position ou dans un certain état.

Sadi Carnot, dans un mémoire célèbre paru en 1824 sur la puissance des machines à feu, fit le premier pas décisif dans cette voie. On savait depuis Lavoisier, et nous avons eu occasion de le dire, que la chaleur n'a pas de poids appréciable. Au sens que nous avons donné au mot masse, la chaleur n'a donc pas de masse. Mais Lavoisier avait découvert des méthodes précises pour mesurer des

quantités de chaleur. On croyait à cette époque que la chaleur se comportait comme un fluide; l'assimilation de la quantité de chaleur à une masse de nature particulière, dénuée de poids, était tout à fait naturelle. Sadi Carnot n'hésita pas à la faire.

La quantité du calorique étant réputée invariable, il en résultait, comme conséquence nécessaire, que le calorique ne faisait que passer dans les machines et devait se retrouver en totalité dans le condenseur. Toutefois il n'y arrive pas dans son état primitif; quelque chose s'est modifié: la température s'est abaissée; il y a là comme une chute, et il était fort naturel d'assimiler ce passage d'une certaine quantité de matière de nature spéciale, d'une température plus élevée à une autre plus basse, à la descente d'un poids d'un certain niveau à un niveau inférieur. En conséquence, Sadi Carnot prit comme mesure de l'énergie rendue disponible par la chute de la quantité Q de chaleur de la température T_1 à la température T_2, le produit $Q\varphi(T_1 - T_2)$, $\varphi(T_1 - T_2)$ représentant une certaine expression calculable numériquement, quand sont connues les deux températures T_1 et T_2 entre lesquelles la machine travaille. Réciproquement, si l'on doit faire passer la chaleur Q de la température T_2 à la température T_1, il faut dépenser une quantité de travail $Q\varphi(T_1 - T_2)$.

On voit que dans cette thermodynamique fondée sur le principe de la constance de la quantité du calorique, il n'y a pas, à proprement parler, d'équivalent mécanique de la chaleur; l'énergie calorifique est une énergie de situation ou d'état, en tous points comparable à l'énergie potentielle d'une certaine masse pondérable placée à une certaine hauteur au-dessus de la surface de la terre.

Cette nouvelle forme d'énergie supposée, il était naturel

de refaire un travail analogue à celui de Leibnitz ; de chercher à quelle condition le mouvement perpétuel reste impossible.

Or, si l'expression $\varphi(T_1 - T_2)$ n'était pas la même pour toutes les machines, si sa valeur numérique, calculée pour deux températures données, n'était pas invariable, le mouvement perpétuel serait possible. En effet, on peut employer dans une machine une certaine quantité de travail t_1 à élever une certaine quantité de chaleur Q de la température T_2 à la température T_1 ; puis, avec une autre machine, on récupère une quantité de travail t_2, en laissant tomber cette même quantité de chaleur Q de la température T_1 à la température T_2. Il faut, pour que le mouvement perpétuel soit impossible, qu'une fois ce cycle d'opérations accompli il n'y ait ni gain ni perte de travail, en d'autres termes que l'on ait $t_2 = t_1$. C'est évident pour le gain : s'il y avait perte, il suffirait d'échanger entre elles les machines, et la perte se transformerait en gain. D'où Carnot concluait ce théorème fondamental : « Toutes les machines parfaites sont équivalentes, et l'utilisation d'une même chute de température et d'une même quantité de chaleur fournit toujours la même quantité de travail. Réciproquement, quelle que soit la machine employée, à l'aide d'une quantité de travail donnée on ne peut faire passer qu'une quantité de chaleur donnée d'une température déterminée à une autre température également déterminée. »

III

Des expériences très certaines n'étaient pourtant pas d'accord avec cette constance supposée de la quantité du calorique. Rumford avait observé, dès la fin du XVIII[e] siècle, que lorsqu'on forait des canons, il se dégageait une énorme quantité de chaleur : il en est de même dans tous les frottements. Mais on donnait de ces phénomènes une explication très analogue à celle de Leibnitz. On croyait que le travail dépensé dans le frottement passait à l'état de force vive vibratoire et que ces vibrations étaient accompagnées de production de chaleur. On lit dans le *Traité de physique* de Pouillet, paru en 1827 :

« On peut se demander si les dégagements de chaleur qu'on observe dans le frottement résultent d'une compression permanente des corps frottés ou si le mouvement vibratoire imprimé à leurs molécules n'est pas lui-même une cause de chaleur. Il est difficile de faire sur ce point des expériences décisives. Cependant les quantités de chaleur produites par le frottement et par la ségrégation des molécules sont souvent si considérables que nous devons, avec Rumford et plusieurs phycisiens, en attribuer au moins une partie aux mouvements de vibration des molécules frottées. » On était encore loin de voir entre le travail dépensé et la chaleur produite une connexion nécessaire. Hirn dit excellemment : « Pendant une longue suite d'années des centaines d'ingénieurs fort instruits ont assisté à l'expérience du frein de Prony, ont vu des puissances motrices colossales absorbées à tenir suspendu et parfaitement immobile un poids donné. Nul d'entre

eux pourtant n'était étonné de cette destruction continue de force vive. On voyait fumer le frein, on était obligé d'y verser des flots d'eau pour l'empêcher de s'allumer, personne pourtant ne se demandait si la chaleur ici produite n'était peut-être pas une compensation du travail dépensé. L'idée de frottement entraîne pour tout le monde celle d'usure des parties frottantes et par conséquent celle d'une dépense d'efforts nécessaire; d'un autre côté, la physique expliquait aussi par l'usure la chaleur due au frottement. »

C'est vers 1842 que le docteur Mayer a clairement énoncé le principe que la chaleur est une forme de l'énergie; qu'à une certaine dépense de travail correspond un certain gain de chaleur, que réciproquement une certaine dépense de chaleur permet de produire un certain travail. On appelle équivalent mécanique de la chaleur la quantité de travail exprimée en kilogrammètres à laquelle équivaut une calorie; c'est-à-dire la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 0° à 1° un kilogramme d'eau.

La méthode employée par Mayer pour calculer cet équivalent est très simple.

On appelle chaleur spécifique d'un corps le nombre de calories qu'il faut dépenser pour élever la température d'un kilogramme de ce corps de t° à $t + 1^\circ$. Or, on savait que la chaleur spécifique d'un gaz n'est pas la même suivant qu'on maintient constant son volume : dans ce cas, c'est la pression qui augmente; ou qu'on maintient constante la pression: le volume du gaz doit alors nécessairement varier. Ces deux chaleurs spécifiques sont dites sous volume constant et sous pression constante. Désignons-les par les symboles C_v et C_p.

La différence $C_p - C_v$ est égale pour l'air à 0,069, ce

qui veut dire qu'il faut 69 millièmes de calorie de plus pour élever de 1° la température d'un kilogramme d'air sans changer la pression, mais en augmentant le volume, que pour élever la température sans changer le volume, mais en augmentant la pression. Or, dans le premier cas, l'air en se dilatant produit un certain travail qu'il est facile d'évaluer. Supposons le gaz renfermé dans un corps de pompe et agissant sur un piston de surface s; soit p sa pression, c'est-à-dire la force évaluée en kilogrammes qu'il exerce normalement sur chaque centimètre carré du piston; la force totale est $p \times s$. Si le piston se déplace d'une longueur l (*fig.* 46), le travail qui est égal au produit de la force par le déplacement, puisque la force et le déplacement sont parallèles, est donc représenté par le produit $p \times s \times l = pd$ en appelant d le changement de volume du gaz. Or, il est facile d'évaluer ce changement de volume pour une dilatation de 1°; en effet, les lois de Mariotte et de Gay-Lussac nous apprennent que, si on désigne par p et v les pression et volume à une certaine température t, p_1 et v_1 les mêmes quantités pour une autre température t_1, en appelant α le nombre $\frac{1}{273}$, on a la relation:

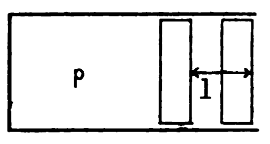


FIG. 46.

$$\frac{pv}{1+\alpha t} = \frac{p_1 v_1}{1+\alpha t_1}.$$

Appliquons cette formule au cas où $p = p_1$, puisque la pression reste constante, et de plus où $t_1 = t + 1$, puisque l'augmentation de température est de 1°. Il vient:

$$v_1 - v = \frac{\alpha v}{1+\alpha t} = d.$$

D'après ce résultat, le travail effectué par 1 kilogramme d'air est :

$$pd = \frac{\alpha pv}{1 + \alpha t}.$$

Or, d'après les lois de Gay-Lussac et de Mariotte, le produit $\frac{pv}{1 + \alpha t}$ est toujours le même, quelles que soient les conditions de température et de pression ; nous pouvons donc supposer pour le calcul que l'air est réduit à 0° et à la pression d'une atmosphère. Prenons le mètre comme unité de longueur, le kilogramme comme unité de poids ; la pression de 1 atmosphère correspond à 10,330 kilogrammes par mètre carré. De plus, on sait qu'à 0° et sous cette pression un kilogramme d'air occupe :

$$773^{\text{lit}},3 = 0^{\text{mc}},7733.$$

Le travail correspondant à une dilatation de 1° est donc de :

$$\frac{10{,}330 \times 0{,}7733}{273} = 29{,}25 \text{ kilogrammètres.}$$

Dans le second cas, où la dilatation du gaz se fait sans changement de volume, mais avec un simple accroissement de pression, le travail est nul. Si le principe du docteur Mayer est exact, on peut écrire que la quantité de chaleur de 0c,069 correspond précisément au travail que nous avons calculé. Divisons le nombre trouvé par 0,069 pour avoir le travail correspondant à une calorie ; il vient 425 kilogrammètres. C'est la valeur de l'équivalent mécanique de la calorie.

Notre raisonnement n'est pas rigoureux, car ne pourrait-on pas dire que la chaleur en excès, nécessaire à la dilatation sous pression constante, est employée non pas à effectuer le travail extérieur, mais à produire le changement de volume. Car, si nous supposions qu'on éloigne l'un de l'autre la terre et le soleil, il faudrait dépenser un certain travail, pour vaincre l'attraction mutuelle ; il paraît logique d'admettre qu'il s'exerce entre les molécules d'un corps certaines attractions qu'il faut vaincre, quand on fait changer le volume du corps, et, en admettant même le principe de Mayer, la quantité de chaleur égale à 0^c,069 sert à produire le travail extérieur, mais peut-être aussi à produire le travail correspondant à l'écartement des molécules du gaz : ce nombre 425 ne serait qu'une limite inférieure de l'équivalent.

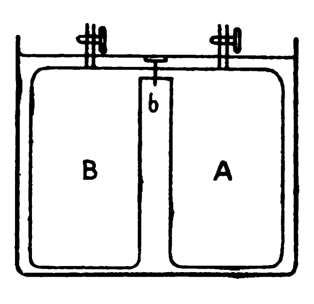


Fig. 47.

M. Joule a fait une très remarquable expérience pour démontrér que ce dernier travail est nul. Imaginons deux vases métalliques réunis par un tube fermé à l'aide d'un robinet. Ces deux vases plongent dans un autre vase plein d'eau. On comprime de l'air dans le vase A (*fig.* 47), et on fait le vide en B. Lorsqu'on ouvre le robinet *b*, le gaz se précipite de A en B, et on constate que la température de l'eau n'a pas changé. La dilatation du gaz n'a donc produit aucun refroidissement dans sa masse : car, puisqu'en B on avait fait le vide, la dilatation ne correspond plus à aucun travail extérieur ; en d'autres termes, dans sa dilatation le gaz n'a aucun obstacle extérieur à vaincre. Puisque sa

température reste la même, c'est d'après le principe de l'équivalence que l'attraction entre ses molécules est nulle. Le calcul précédent se trouve ainsi légitimé, et nous pouvons admettre pour équivalent mécanique de la calorie le nombre 425.

Si dans ce cas particulier le travail dit intérieur est nul, il n'en sera pas toujours de même; aussi sommes-nous amenés à énoncer plus rigoureusement le principe de l'équivalence. Nous disons qu'un corps ou un système de corps subit un cycle fermé d'opérations, lorsque les corps du système reprennent à la fin de l'expérience les mêmes états qu'ils avaient au début.

Le principe de l'équivalence consiste dans la proposition suivante: « Dans le cas où le système de corps parcourt un cycle fermé d'opérations, il y a proportionnalité entre le travail dépensé et la chaleur dégagée, ou réciproquement entre la chaleur qui disparaît et le travail rendu disponible. Si on exprime la chaleur Q en calories et le travail T en kilogrammètres, on a la relation:

$$T = 425Q. »$$

Il est facile de montrer que la condition du cycle fermé est nécessaire pour que le principe s'applique. Lorsque l'eau se transforme en glace, il y a un notable accroissement de volume, par conséquent un travail extérieur produit. On pourrait avec de l'eau qui se congèle déplacer les corps les plus lourds, et pourtant chaque kilogramme d'eau transformée en glace abandonne 79 calories, de quoi produire 33,575 kilogrammètres. Il y a donc gain de chaleur et gain de travail. Mais le corps qui a servi à l'opération n'est pas, à la fin de l'expérience, dans son état initial; le cycle n'est pas fermé.

Rétablissons maintenant en toute rigueur le calcul de Mayer à l'aide de l'expérience de Joule. 1° Nous prenons un kilogramme d'air à 0° et à une atmosphère ; sans changer le volume, nous le portons à 1°; en lui fournissant une quantité de chaleur C_v, sa pression croît; 2° en employant l'appareil de Joule et en choisissant convenablement la capacité du vase B, où nous faisons le vide, nous ramenons le gaz à sa pression primitive, sans qu'il accomplisse de travail extérieur : sa température reste égale à 1° ; 3° nous le comprimons, en maintenant sa pression constante et, par conséquent, en lui enlevant de la chaleur, jusqu'à ce qu'il revienne à son volume primitif et à la température 0°; il restitue la quantité de chaleur C_p, qui est plus grande que la chaleur fournie C_v. Nous avons fait en tout un gain de chaleur $C_p - C_v = 0^c,069$, mais nous avons dépensé pour la compression 29,25 kilogrammètres. Or le gaz est revenu à son état initial, le cycle d'opérations est fermé, nous pouvons appliquer la relation d'équivalence, et nous trouvons le nombre 425 kilogrammètres pour l'équivalent mécanique de la calorie.

IV

La question est loin d'être résolue dans son ensemble. Pour que le mouvement perpétuel soit impossible, il faut que ce même équivalent se retrouve identique, quel que soit le phénomène qui nous serve à le calculer. Car supposons que pour un autre cycle d'opérations l'équivalent soit 430. A l'aide de ce second cycle, nous transformerions une calorie en 430 kilogrammètres ; à l'aide du premier, nous utiliserions 425 de ces kilogrammètres à reproduire

une calorie, et il nous resterait encore, une fois tous les corps ramenés à leur état initial, un gain de 5 kilogrammètres: ce qui est précisément la définition du mouvement perpétuel. Il est donc nécessaire de démontrer que l'équivalent de la calorie est le même, quelle que soit l'expérience qui serve à le déterminer.

Expérience de Joule. — Dans un vase plein d'eau ou de mercure, peut tourner un arbre vertical AB (*fig.* 48) qui porte des palettes disposées autour de lui dans des plans verticaux; dans leur mouvement de rotation elles entraînent le liquide. Il se développe donc un frottement, c'est-à-dire un travail résistant qui est transformé en chaleur: le liquide s'échauffe. Le mouvement des palettes est obtenu à l'aide d'un poids P et d'un cordon qui s'enroule sur une poulie CD montée sur l'arbre AB. Le déplacement du poids et sa vitesse à un moment quelconque de la chute sont déterminés à l'aide d'une règle verticale EF. Le travail du poids est mesuré par le produit PH, si H est la hauteur de chute, diminué de la force vive $\frac{mv^2}{2}$ que le poids possède au moment où il butte sur le plan EQ. La différence $PH - \frac{mv^2}{2}$ serait nulle si la chute était libre. Elle ne l'est plus, parce qu'une partie du travail de la pesanteur est employée à compenser le travail des frottements. On peut

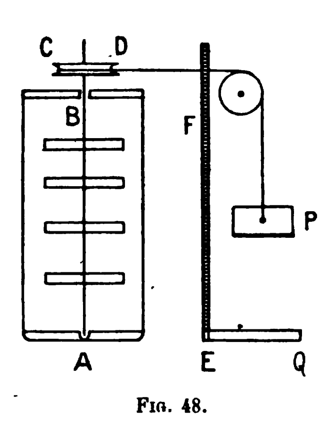


Fig. 48.

donc mesurer, d'une part, le travail et, de l'autre, l'échauffement. Pour que celui-ci soit assez grand pour être évalué avec exactitude, on fait descendre plusieurs fois de suite le poids. On a ainsi trouvé pour E, l'expérience étant faite avec l'eau 424,9 kilogrammètres ; avec le mercure, 425,6.

Expérience de Hirn sur la percussion. — On savait depuis fort longtemps qu'un métal s'échauffe lorsqu'on le bat sur l'enclume, ou lorsqu'on le comprime par le choc du balancier; mais on est resté pendant bien longtemps dans l'ignorance de la cause du phénomène. Pouillet, dans sa *Physique* en parle ainsi : « Il était curieux d'observer si ce dégagement de chaleur est accompagné d'une réduction de volume permanente ; car, si le corps, un instant refoulé sur lui-même, revenait à ses dimensions primitives, on ne verrait plus de raison à la production de la chaleur. Or, il résulte de quelques expériences de MM. Berthollet, Biot et Pictet que le cuivre et l'argent, qui dégagent beaucoup de chaleur sous le premier coup du balancier, en dégagent moins sous le second et moins encore sous le troisième. Enfin, quand ils sont tellement écrouis que leurs molécules ne puissent plus se rapprocher davantage d'une manière permanente, les chocs les plus violents ne produisent plus d'élévation de température. » Ainsi donc, en 1827, on donnait encore pour cause à la production de chaleur la déformation permanente accompagnée d'écrouissage, c'est-à-dire un changement d'état du métal. C'était tout à fait erroné, car si dans le choc il faut effectivement qu'il y ait déformation pour qu'il y ait production de chaleur, c'est que le glissement des parties produit un travail analogue au frottement ; mais l'état initial et

l'état final du métal peuvent être identiques à cette déformation près, sans que la chaleur cesse de se dégager. Pour mesurer l'effet du choc sur les corps mous, M. Hirn a employé l'appareil suivant (*fig.* 49). C'est un cylindre de fer AB du poids de 350 kilogrammes, maintenu au-dessous d'un madrier MM par deux paires de cordes qui le forcent à se mouvoir parallèlement à lui-même. En C se trouve la masse de plomb qui doit être écrasée et dont on mesure l'échauffement. En P est suspendu un prisme de

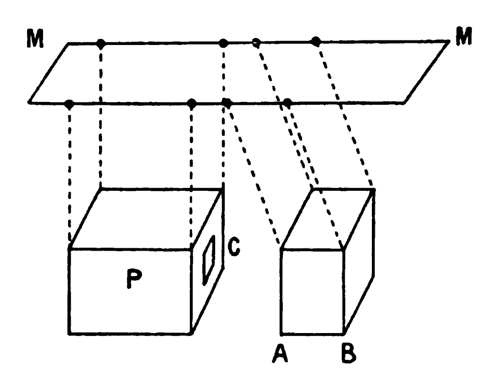


Fig. 49.

grès du poids de 940 kilogrammes et qui sert d'enclume. On soulève AB à une hauteur verticale h et on le laisse retomber : il écrase le plomb contre le grès et remonte à une hauteur h' ; le travail total dépensé au moment du choc est $p(h - h')$. Mais ce travail n'est pas employé tout entier à échauffer le plomb ; car l'enclume s'est soulevée de la hauteur verticale H : il reste donc un travail $p(h - h') - \mathrm{PH}$ transformé en chaleur. Soit p' le poids du plomb, c sa chaleur spécifique, θ l'échauffement ; la chaleur dégagée est $p'c\theta$. L'équivalent mécanique de la calorie est donné par le quotient du travail dépensé $p(h - h') - \mathrm{PH}$ par le

nombre de calories dégagées, soit $p'c\theta$. On a ainsi trouvé 425 kilogrammètres.

Le cycle d'opérations n'est pas ici complètement fermé; mais on peut admettre qu'aucune quantité de chaleur n'est emmagasinée dans le plomb sous forme latente, en d'autres termes qu'il n'y a pas de travail intérieur produit. Le plomb n'a pas changé d'état en s'écrasant. Ni sa densité, ni sa chaleur spécifique, ni l'aspect du métal ne se sont modifiés. Sans doute, le plomb après l'écrasement ne revient pas à sa forme primitive, et c'est même ce changement permanent qui est l'occasion immédiate et unique du développement de chaleur; mais le glissement relatif des parties, le frottement analogue à celui d'un liquide, ne constitue pas un changement d'état; d'ailleurs, on sait que le plomb ne s'écrouit pas.

Expérience de Hirn sur le frottement de l'eau. — Ces expériences, analogues à celles de Joule, sont très intéressantes comme introduction à l'étude du frein de Prony. L'appareil de Hirn se compose d'un cylindre de laiton ABCD de 30 centimètres de diamètre sur 1 mètre de longueur (*fig.* 50). Il est poli et monté sur un axe vertical PP′ qui peut lui communiquer un mouvement très régulier. Extérieurement et concentriquement, un cylindre A′B′C′D′ poli intérieurement est placé à 3 centimètres du premier. Des disques ferment en A′B′ et C′D′ ce cylindre; ils sont munis

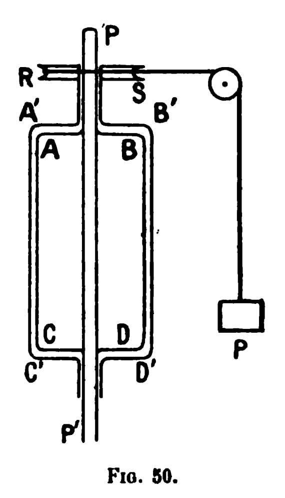


Fig. 50.

de boîtes à étoupe par où sortent les bouts de l'axe du cylindre intérieur. L'intervalle entre les cylindres est rempli d'eau. A cause du frottement intérieur du liquide, lorsque le cylindre ABCD tourne, il tend à entraîner dans son mouvement de rotation le cylindre extérieur avec une force qu'on mesure en s'opposant à ce mouvement. Dans ce but, un cordon est enroulé sur une poulie de diamètre 2L, qui est fixée au cylindre extérieur : au cordon est attaché un poids P. Soit $2l$ le diamètre du cylindre extérieur, p la résultante des forces de frottement qui sont appliquées tangentiellement à ce cylindre, on doit nécessairement avoir pour l'équilibre $pl = PL$, $p = \frac{PL}{l}$. Soit n le nombre de tours que fait par seconde le cylindre intérieur; la vitesse du déplacement d'un point de sa surface est $2\pi nl$; c'est aussi le déplacement par seconde du point d'application des forces de frottement. Leur travail, égal à $p \times 2\pi nl = 2\pi n PL$, est donc facile à mesurer. Des tubes verticaux, soudés aux disques de fermeture A'B' et CD', permettent d'établir dans l'appareil un courant continu de liquide dont on détermine l'échauffement. Connaissant la quantité de liquide échauffé, on calcule aisément la chaleur totale dégagée. Par suite de ses grandes dimensions et de sa vitesse, on peut dépenser dans l'appareil jusqu'à 10 chevaux-vapeur, soit 750 kilogrammètres par seconde, et recueillir $1^{\text{calorie}},72$ dans le même temps. On a trouvé dans ces expériences $E = 432$.

Frein de Prony. — Le frein est un appareil qui sert à déterminer la puissance d'une machine, c'est-à-dire le nombre de kilogrammètres qu'elle est capable de fournir en un temps donné. On sait que, lorsque les puissances

sont égales aux résistances, le mouvement est uniforme : il suffit donc de développer des résistances mesurables jusqu'à ce que le mouvement reste uniforme, pour connaître directement la puissance de la machine. Le mécanisme précédent résout le problème, mais présente l'inconvénient de ne pas développer des frottements assez intenses, et surtout de ne pas permettre de faire varier aisément ces frottements ; en le modifiant de manière à supprimer ces défauts, nous obtiendrons le frein de Prony. Soit un cylindre C monté sur l'axe O mis en rotation par la

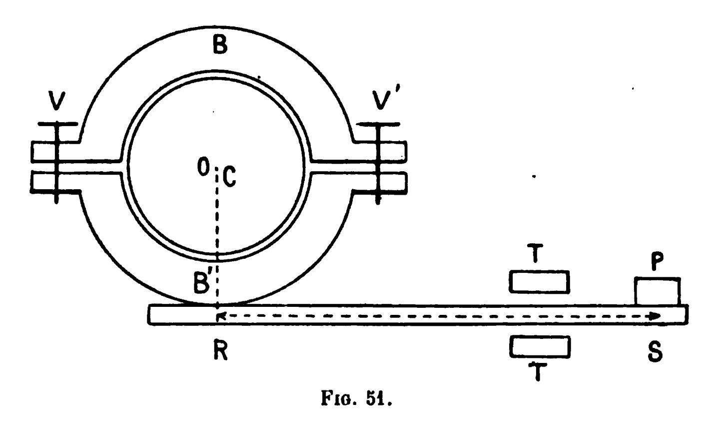


Fig. 51.

machine (*fig.* 51). Deux pièces de bois B et B' l'enserrent et peuvent être pressées plus ou moins contre lui au moyen des écrous V et V'. La pièce B' porte un levier de longueur L qui supporte le poids P. On augmente le serrage des écrous jusqu'à ce que le mouvement devienne uniforme et on charge le levier jusqu'à ce qu'il reste en équilibre entre les arrêts TT. Le travail des frottements est alors $2\pi n PL$; ce produit mesure la puissance de la machine. Il se dégage, bien entendu, entre la roue C et les pièces B et B' une quantité énorme de chaleur : on est forcé pendant toute l'opération de jeter de l'eau sur l'appareil.

ÉCOULEMENT DE L'EAU SOUS FORTES PRESSIONS. — L'appareil de Hirn (*fig.* 52), se compose d'un corps de pompe rempli d'eau dans lequel un piston se meut à frottement dur. Sur la tige de ce piston appuie avec une force de $45^k,28$ par centimètre carré une pièce de fer qui pose à son autre extrémité sur un couteau. Le tout est plongé dans un grand récipient plein d'eau qui maintient constante la température de l'eau dans le corps de pompe. Sous la pression qu'exerce le piston, cette eau sort par un tube en col de cygne terminé par un ajutage de verre de $0^{mm},5$ de dia-

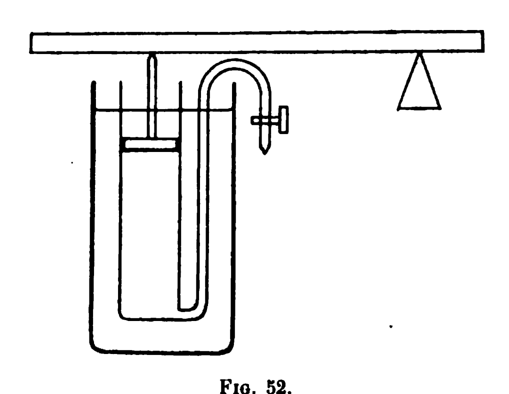


FIG. 52.

mètre : on en détermine l'échauffement. L'élévation moyenne de température était de $1°,0457$. Le travail par centimètre cube d'eau écoulée est égal à la pression par le débit, soit 45,20 kilogrammes-centimètres, ou 0,4528 kilogrammètres. La chaleur correspondante dégagée était de $0^c,0010457$; donc, pour chaque calorie dégagée, il y a

$$\frac{0,4528}{0,0010457} = 433 \text{ kilogrammètres dépensés.}$$

V

On voit que la nature du phénomène employé pour déterminer l'équivalent mécanique de la calorie est indifférente ; on obtient toujours le même nombre et la condition qui était imposée par le postulat que le mouvement perpétuel est impossible, se trouve ainsi satisfaite. Toutes les méthodes, à la condition qu'elles présentent une exactitude suffisante, conduisent au même résultat, au degré d'approximation que comportent les expériences.

Il est donc prouvé qu'il existe à côté du travail disponible, ou énergie potentielle, à côté de la force vive, ou énergie actuelle, une troisième force d'énergie représentée par la chaleur. Ces diverses formes d'énergie sont-elles réductibles l'une à l'autre ? On conçoit qu'il est tentant de les ramener au moindre nombre possible, par exemple d'assimiler la chaleur à une force vive. C'est reprendre pour la troisième fois l'hypothèse de Leibnitz. Ce philosophe imaginait que, lorsque la force vive semble disparaître, elle se transforme en des vibrations des parties constituantes des corps ; ne peut-on pas admettre que la chaleur est une vibration plus rapide de ces mêmes parties, un mouvement oscillatoire des molécules ? Assurément rien ne démontre le contraire, mais il est évident qu'on ne peut guère apporter de la réalité de cette hypothèse une démonstration directe.

D'ailleurs qu'y gagne-t-on ? A peu près rien. Il n'y aurait vraiment d'intérêt à chercher l'assimilation de la chaleur à une force vive que si l'on pouvait ramener l'une à l'autre l'énergie potentielle et l'énergie actuelle ; il semble, au

moins dans l'état actuel de nos connaissances, que nous soyons encore loin de ce résultat.

Le principe de la conservation du mouvement et l'assimilation de la chaleur à un mouvement sont des hypothèses gratuites. Au contraire, le principe de la conservation d'une quantité que nous appelons énergie, et qui peut se présenter sous des formes irréductibles et pourtant telles que leurs mesures donnent une somme constante, est un fait d'expérience à l'abri de toute contestation. Entre ces formes, il y a équivalence, en ce sens qu'elles peuvent se substituer l'une à l'autre, que, si l'une croît, l'autre décroît d'autant; mais il peut exister dissemblance de nature. Il faut donc envisager les théories qui font de la chaleur un mouvement, comme des représentations commodes, mais n'ayant aucune existence objective nécessaire.

Ce qui est fourni par l'expérience est l'équation fondamentale applicable à tout cycle fermé. Travail des forces $=$ accroissement des forces vives $+$ dégagement de chaleur.

Cette équation ne s'applique encore qu'à un cycle fermé d'opérations; ne peut-on pas la généraliser de manière à l'appliquer à tous les cas?

CHAPITRE XIII

DU TRAVAIL INTÉRIEUR. — CONCLUSIONS

I

Nous avons dû, dans le dernier chapitre, apporter une restriction à l'équation fondamentale de la dynamique; elle est seulement applicable au cas d'un cycle fermé d'opérations, c'est-à-dire au cas où les corps, partant d'un certain état, reviennent au même état et ne subissent aucune déformation permanente. Lorsque nous avons appliqué le principe et que cette condition n'était pas réalisée, nous avons dû démontrer que la déformation permanente n'impliquait aucun travail dépensé ni absorbé. Il s'agit maintenant de lever cette restriction.

Rien n'est plus simple à définir et, au moins en principe, à mesurer que le travail; il suffit de déterminer à chaque instant l'intensité de la force utile et le déplacement du point d'application. Mais on conçoit qu'il puisse se présenter des circonstances telles que nous soyons par toutes les analogies assurés de la dépense d'un certain travail sans pour cela que nous parvenions à mesurer ni l'intensité des forces mises en jeu, ni le déplacement de leurs points d'application; à la rigueur, nous ne sommes pas certains que le travail dans ces conditions particulières soit effectivement un produit d'une force par un déplacement;

nous l'imaginons ainsi pour la commodité que nous y trouvons.

Nous savons d'expérience certaine que les corps de la nature tendent les uns vers les autres, que par conséquent, pour les éloigner les uns des autres, nous devons dépenser un certain travail : et non seulement les masses planétaires agissent entre elles, mais aussi les corps de petites dimensions. Il est naturel d'en conclure que les particules très petites des corps ne font pas exception à la règle et qu'il existe pour les maintenir au contact certaines forces attractives, sur la nature desquelles nous ne savons rien et dont nous ignorons les lois d'action.

Quand on amène un corps d'un état à un autre état, il est encore naturel de supposer que ces forces ont travaillé, soit pour s'opposer à ce changement d'état, soit pour le favoriser; en d'autres termes, le travail est tantôt négatif, tantôt positif.

Nous pouvons encore faire sur le travail des forces qui s'exercent entre les plus petites parties des corps, travail que nous appellerons intérieur, des hypothèses rendues vraisemblables par les analogies et par leurs conséquences, et précieuses parce qu'elles permettent de pousser plus loin la solution du problème.

Nous avons dit que les forces admettent un potentiel, quand leur travail ne dépend que de la position initiale et de la position finale des éléments du système et non des positions intermédiaires. Ainsi les forces qui s'exercent entre les divers corps célestes, et plus particulièrement la force de la pesanteur à la surface de la terre, admettent un potentiel. Nous avons généralisé cette définition en remplaçant l'idée de position par l'idée d'état; ce changement d'état n'implique plus nécessairement le chan-

gement de position au moins apparent, et nous avons trouvé, comme exemple de forces admettant un potentiel par rapport à un état, les forces dites d'inertie; l'état correspondant est la force vive du système.

L'hypothèse que nous sommes amenés à faire consiste à supposer que les forces intérieures ont un potentiel, c'est-à-dire que dans le passage d'un corps d'un premier état A à un second état B, définis par deux quantités W_A et W_B, le travail est complètement connu par ces deux états, indépendant des états intermédiaires, et uniquement égal à la différence $W_A - W_B$. Cette quantité W s'appelle l'énergie interne du système. On voit immédiatement l'analogie entre ces dénominations et celles que nous avons introduites dans le cas des forces extérieures.

Cette énergie interne est une quantité très complexe ; nous avons dit, pour faciliter la représentation, que sa variation correspond au travail de forces intérieures ; mais ce serait s'embarrasser de restrictions gênantes que de prendre cette comparaison autrement que comme une façon de parler. Nous allons le montrer tout à l'heure.

Si notre hypothèse est exacte, pour un cycle fermé d'opérations, le travail intérieur disparaît; car la quantité W, qui ne dépend que de l'état, reprendra à la fin la valeur qu'elle avait au commencement ; le travail intérieur est donc nul, quelle que soit la suite des opérations transitoires; aussi avons-nous pu le négliger dans l'équation de la dynamique.

Dans le cas où l'état final et l'état initial ne seraient pas les mêmes, nous pouvons maintenant généraliser cette équation.

Soient A et B les deux états, nous imaginerons : 1° que le système est complètement isolé, c'est-à-dire qu'il n'y a pas

de forces extérieures et aucune communication calorifique; 2° que les forces extérieures du système accomplissent un certain travail et que l'on communique de l'extérieur une certaine quantité de chaleur. Supposons de plus que les forces mesurables aient un potentiel, en d'autres termes qu'il existe une énergie potentielle.

Premier cas. — Si on évalue l'énergie potentielle, l'énergie actuelle et l'énergie intérieure, la somme de ces trois quantités est constante.

Deuxième cas. — La somme précédente n'est plus constante ; son accroissement a pour valeur la somme du travail dépensé par les forces extérieures et de l'équivalent mécanique de la chaleur communiquée.

Les expériences du chapitre précédent sont des applications immédiates de ce principe ; en effet, on s'arrange pour que les différentes espèces d'énergie du système employé comme machine soient les mêmes au commencement et à la fin des opérations; la somme en est donc constante; on peut affirmer, d'après le principe, que la somme du travail dépensé par les forces extérieures et du travail équivalent à la chaleur fournie est nulle. Le système employé comme machine a simplement servi de transformateur.

II

Peut-on connaître quelque chose de plus sur la nature du travail intérieur, ou doit-on se contenter de savoir calculer sa valeur, pour des états déterminés? Cette assimilation que nous avons faite de l'énergie interne à l'énergie potentielle de forces intérieures, peut-elle être démon-

trée, ou devons-nous la considérer uniquement comme une manière de parler? Un exemple nous permet de conclure.

Soit un kilogramme d'eau que nous transformons en glace sans changer sa température. Évaluons la valeur des diverses sortes d'énergie et appliquons le principe :

Travail positif des forces extérieures au système + chaleur fournie au système = accroissement de l'énergie interne + accroissement de l'énergie actuelle des corps + accroissement de l'énergie potentielle des forces intérieures, mais directement mesurables, qui s'exercent entre ces corps.

Dans notre exemple nous pouvons admettre que l'eau et la glace sont au repos ; l'énergie actuelle pour les deux états, et par conséquent son accroissement quand on passe de l'un à l'autre, sont nuls. Les forces intérieures et directement mesurables sont et demeurent nulles ; l'accroissement de l'énergie potentielle est nul. Or, le volume de la glace étant plus grand que celui de l'eau, il y a dilatation et par conséquent travail positif effectué contre la pression extérieure, le travail des forces extérieures est négatif ; de plus, quand le kilogramme d'eau passe à l'état de glace, il cède 79 calories ; la chaleur n'est donc pas fournie au système, mais restituée par le système. Nous pouvons conclure de l'équation qu'il y a une diminution de l'énergie interne, et par conséquent, dans l'hypothèse où cette énergie serait l'énergie potentielle des forces intérieures, travail positif de ces forces.

En effet, quand un poids qui est d'abord à 10 mètres passe à 5 mètres, le mouvement qui s'effectue est favorisé par la pesanteur : le travail des forces est positif, l'énergie potentielle diminue, puisqu'elle représente le travail disponible, dont nous avons dépensé une partie. De même,

puisque de la chaleur est dégagée, puisqu'un travail extérieur a été produit, il faut comme compensation que la modification d'état ait été favorisée par le travail positif de quelque force, c'est-à-dire par la diminution de quelque énergie. Or, ici il n'intervient comme forces que celles que nous avons appelées forces intérieures ; et corrélativement une seule espèce d'énergie a pu décroître, l'énergie intérieure. Toutes ces conséquences sont très certaines et indépendantes de toute théorie.

Mais voici où gît la contradiction. Si, comme nous l'avons supposé pour faciliter la représentation du phénomène, les forces intérieures ne sont pas autre chose que des forces d'attraction entre les parties du corps, forces analogues à la gravitation universelle, chaque fois qu'il y a distension, augmentation de volume, il est nécessaire que le travail de ces forces, qu'on ne peut évidemment pas supposer répulsives, soit négatif; c'est-à-dire qu'elles gênent le changement de volume. Or, nous trouvons qu'il est ici positif, il n'y a pas de doute sur ce point, et que, d'autre part, il y a accroissement de volume et perte de chaleur. La conclusion s'impose : notre assimilation n'a absolument aucun sens.

Sans chercher à préciser sous quelle forme existe l'énergie intérieure, nous pouvons nous faire maintenant une idée juste de ce que sont les capacités calorifiques et les chaleurs dites latentes.

On appelle calorie la quantité de chaleur nécessaire pour porter un kilogramme d'eau liquide de 0° à 1°. On appelle chaleur spécifique C d'un corps à t° la quantité de chaleur nécessaire pour porter un kilogramme de ce corps de t° à $t + 1^\circ$; si le poids du corps est p kilogrammes, la chaleur nécessaire pour produire le même accroisse-

ment de température est $p \times c$; ce produit s'appelle capacité calorifique. Ceci posé, dans quel état se trouve la chaleur que le corps semble avoir emmagasinée? Pendant longtemps, jusqu'à Clausius, c'est-à-dire jusqu'à ce qu'on ait défini le travail interne, on supposait que le corps emmagasinait le calorique, comme une éponge le fait d'un fluide, et de là est venue cette terminologie de capacité calorifique qu'il n'y a d'ailleurs pas lieu de changer, car il suffit de ne plus y attacher son sens vulgaire. Que la chaleur corresponde à quelque mouvement des particules ou à quoi que ce soit, on ne peut plus faire cette supposition ; une partie de la chaleur a disparu bel et bien, puisque le corps s'est dilaté, quelquefois beaucoup. Il a par conséquent repoussé l'atmosphère environnante, exécuté un certain travail dont l'expression générale est $p\,(v_2 - v_1)$ en appelant p la pression évaluée en kilogrammes par mètre carré (soit 10,330 kilogrammes pour une atmosphère), $v_2 - v_1$ la variation du volume, c'est-à-dire la dilatation.

Quant au reste, il doit se retrouver en un accroissement équivalent d'énergie interne, mais il nous est impossible de ramener cette énergie interne à l'un ou l'autre des modes d'énergie que nous connaissons déjà. Nous ne pouvons pas faire le départ de ce qui se trouve à l'état d'énergie potentielle des forces intérieures, non directement mesurables, de ce qui se trouve à l'état d'énergie actuelle des molécules ou dernières parties des corps, ni enfin de ce qui se trouve à l'état proprement dit de chaleur ; car rien ne nous autorise à assimiler la chaleur à un mouvement vibratoire des molécules. Nous pourrions présenter des considérations analogues à propos des chaleurs de vaporisation, etc.

III

Après avoir fait l'histoire du développement des notions fondamentales de la mécanique, nous devons chercher à en tirer quelqués enseignements généraux. Nous avons vu que la méthode suivie dans la découverte des principes est toujours la même : on observe les faits, on généralise les résultats de l'expérience, on énonce des lois. Entre toutes les formes également exactes que l'on peut donner à ces lois, on choisit celle qui est susceptible d'une plus grande généralisation ; c'est cette généralisation, ordinairement indémontrable *a priori*, dont on fait un principe : on le justifie sur autant de cas particuliers qu'il est possible.

Exemples. — Galilée découvre les lois de la chute des corps pesants; Descartes explique le phénomène en pensant qu'une force constante donne des accélérations égales dans des temps égaux. Cette proposition, on l'étend à toutes les forces. — Newton l'énonce d'une manière commode en définissant les forces d'inertie. Cette généralisation, il l'applique ensuite à un nombre quelconque de forces. D'Alembert l'étend même au cas où le système contient des liaisons, quels que soient leurs formes et leur nombre. — Galilée et Descartes démontrent les lois des machines simples et trouvent leur explication dans la proposition du travail virtuel : ils l'admettent pour une machine quelconque et en font un principe, qu'on justifie sur tous les cas particuliers.

Il résulte de là que les principes n'ont aucune certitude *a priori*, que leur seule valeur réside dans ce fait qu'ils ont toujours donné des résultats conformes aux expériences.

Ils sont aux lois ce que les lois sont aux phénomènes, c'est-à-dire une loi plus générale qui comprend un certain nombre de lois particulières. Leur importance est évidemment en raison du nombre de ces lois particulières qu'ils renferment. Nous avons rencontré dans le cours de cette histoire, parmi les principes fondamentaux, ceux du travail virtuel, de la conservation de l'énergie, etc.

Dans l'énoncé des principes interviennent certaines quantités mesurables correspondant à certaines notions : notions de temps, d'espace, notions mécaniques de force, de travail, de choc. C'est entre les quantités mesurables, qui représentent mathématiquement ces notions, que les principes établissent des relations et posent des équations.

Dans toute cette partie de la mécanique, qui traite de ces notions et au sens restreint de leur définition mathématique, il n'y a pas lieu de faire intervenir de théories. Car on veut bien considérer le temps et l'espace, la masse et la force comme notions irréductibles les unes aux autres, et l'expérience, généralisée sous forme de lois et de principes, à l'aide de principes non expérimentaux que nous avons appelés métaphysiques, permet de combler toutes les lacunes. Les quantités qui interviennent dans cette mécanique sont liées directement entre elles ; il n'y a pas place pour une hypothèse.

Dès que s'introduisent les quantités de la chaleur et du travail intérieur, il n'en est plus ainsi et nous pouvons voir en présence deux méthodes. L'une consiste à faire rentrer directement la quantité de chaleur dans l'équation fondamentale, et, puisque les expériences montrent nettement qu'elle équivaut à un travail, lui donner dans ces équations la signification et le rôle d'un travail. Il n'y a pas

là matière à théorie ; de l'expérience on va à l'expression mathématique générale énoncée sous forme d'équation différentielle.

L'autre, plus séduisante, consiste à se faire une représentation imagée des phénomènes, et puisque la chaleur est échangeable dans certaines conditions avec un travail, et par conséquent analogue à une force vive, de la figurer par exemple comme un mouvement vibratoire des dernières parties du corps. De même pour le travail intérieur: on feindra qu'il existe des forces entre les molécules et que, dans les dilatations, le point d'application de ces forces se déplace, qu'elles travaillent en un mot. On sera tout naturellement amené à mettre ce travail intérieur sur la même ligne que le travail des forces extérieures. Procéder suivant cette seconde méthode, c'est édifier une théorie.

Les théories, sous ce point de vue qu'elles sont des cadres très généraux où rentrent les lois particulières, ont donc la plus étroite parenté avec les principes physiques: elles n'en diffèrent que par leur degré de certitude. Servant à jeter des ponts entre les notions mécaniques et des notions dont on ne voit pas la relation avec les premières que nous sommes portés à considérer comme fondamentales, elles le font arbitrairement.

Ce qu'il y a d'essentiel au fond de toutes les théories, ce sont les équations auxquelles elles aboutissent. Toutes les théories, qui nous conduisent à considérer la chaleur comme équivalente à un travail, sont équivalentes sous ce rapport qu'elles fourniront la même généralisation à l'équation fondamentale de la dynamique. On ne voit pas dans ces conditions pourquoi ne pas énoncer purement et simplement l'équation fondamentale généralisée? En définitive, pourquoi s'embarrasser de toutes ces représentations,

qui sont un aide, on l'admet, pour qui débute dans l'étude d'une science, mais n'apprennent absolument rien de nouveau.

En veut-on quelque exemple? L'étude des phénomènes de l'élasticité conduit à certaines équations qui peuvent s'obtenir par deux méthodes. L'une, celle de Lamé, consiste à partir du fait expérimental, à l'exprimer en symboles algébriques, en le serrant du plus près: il n'y a pas là, à proprement parler, de théorie ; les choses sont ainsi parce qu'elles sont ainsi, et c'est là toute leur explication. Cauchy, part, au contraire, de cette supposition que les solides sont discontinus, formés de molécules qui s'attirent suivant certaines lois, et déduit de là une série de conséquences parmi lesquelles les équations mêmes que Lamé retrouvera plus tard. Croit-on préférable l'explication de Cauchy? C'est une erreur; celle de Lamé est très supérieure, précisément parce qu'elle laisse dans l'indétermination ce qui n'a pas besoin d'être déterminé pour connaître complètement le phénomène. La précision de celle de Cauchy en fait la faiblesse.

IV

Si l'on veut bien ainsi ne considérer que la partie solide des explications, c'est-à-dire purement et simplement les formes mathématiques qui relient les quantités mesurables, on peut s'élever à une conception très haute des phénomènes, et qui paraît contenter de nos jours un nombre de plus en plus considérable d'esprits.

Un état de corps peut être considéré comme entièrement connu lorsqu'on a déterminé : 1° les quantités mesu-

rables et arbitraires dont il dépend; 2° les relations qui existent entre ces quantités variables et arbitraires et les autres quantités mesurables.

Voici, par exemple, un gaz de nature connue, analogue à l'hydrogène : l'expérience montre que, si l'on définit la température et la pression du gaz, l'état du gaz est complètement déterminé. Ceci posé, il reste à déduire des expériences les lois qui relient les autres quantités mesurables telles que le volume, l'indice de réfraction, le frottement intérieur, etc., du gaz aux deux quantités arbitraires, température et pression. Ce premier travail définit complètement l'état statique du corps; il ne suffit pas: on peut maintenant supposer que les quantités arbitraires (pression et température dans notre exemple) subiront des variations dans le temps, et chercher quelles lois de variation il en résulte pour les autres quantités mesurables qui en dépendent.

Ce travail devrait être effectué sur tous les corps: il serait considérable, et les bénéfices qui en résulteraient à peu près nuls. Aussi n'est-ce pas encore le but que le physicien doit se proposer. S'il recommence l'étude qu'on a supposée ci-dessus pour différents gaz, il ne tarde pas à s'apercevoir que les constantes numériques de ses équations varient; en d'autres termes, les quantités arbitraires dont dépend un état du corps étant posées, les autres quantités mesurables ne se calculent pas à partir des premières par des équations identiques. Par exemple, la pression et la température étant données, les volumes du même poids d'hydrogène et d'oxygène ne sont pas égaux. Mais il remarque cependant que la forme des équations reste la même. Autre exemple, s'il détermine les lois de propagation du son dans l'un des gaz, il parvient à certaines équa-

tions différentielles qui s'appliquent à l'autre gaz, à la condition de modifier certaines constantes numériques. C'est à la découverte de ces formes qu'il doit s'attacher.

Il résulte de là ces conséquences paradoxales, qu'il importe peu sur quel corps il opère à la condition que, dans la suite de ses expériences, le corps reste identique à lui-même. Si, en général, il préfère choisir pour sujet de son étude des corps bien définis, c'est que, ne pouvant traiter qu'un cas très particulier des problèmes qui se posent, il veut que d'autres puissent continuer ses études en opérant sur un corps identique à celui qui lui a servi. C'est là la seule utilité de ces déterminations de constantes numériques à l'établissement desquelles les physiciens passent des années : ils accumulent des matériaux isolés que l'on pourra ensuite mettre en œuvre.

Il était absolument indifférent pour Fresnel d'étudier tel ou tel cristal, afin de déterminer les lois de la double réfraction ; il suffisait que sa provision d'un cristal toujours le même soit suffisante, au début de ses travaux, pour qu'il pût comparer entre elles ses expériences.

C'est un travail souvent ingrat et inutile que de s'attacher à déterminer une propriété particulière d'un corps qu'on cherche à définir rigoureusement : mieux vaut sur un corps quelconque, inconnu, s'efforcer de trouver plusieurs propriétés, d'étudier plusieurs phénomènes, que l'on tâchera de réunir par une forme mathématique.

L'utilité de cette histoire de la mécanique est de nous montrer comment on est parvenu à la découverte d'un certain nombre de ces formes, dont la généralité fait l'importance. Elle peut nous servir encore à apprécier le caractère arbitraire de ces notions mécaniques dites fondamentales, et combien il est vain de perdre des efforts et un

temps précieux à tout vouloir enfermer dans ces mêmes moules. On a d'abord reconnu que les quantités qui entrent dans les équations de la mécanique étaient insuffisantes: la température a dû se joindre comme quantité irréductible à l'espace, au temps, à la force, à la masse. Qui nous dit que, dans un avenir plus ou moins éloigné, d'autres quantités ne se placeront pas, comme la température, au rang des notions fondamentales? Il serait curieux de montrer avec quel arbitraire on agit, quand on veut de force que tous les phénomènes puissent se loger dans ces moules de la mécanique.

Une autre erreur trop fréquente est de conclure de l'identité des formes mathématiques à l'identité entière des phénomènes. Par exemple, il semble à beaucoup de gens qu'il soit démontré que l'électricité et la lumière sont identiques comme nature, parce que les déplacements par ondes de certains phénomènes électriques et lumineux sont exprimés par les mêmes formes mathématiques. Cela ne prouve absolument rien. Fort heureusement l'expérience montre que le nombre des formes mathématiques suffisantes pour représenter les phénomènes, au moins aujourd'hui, est très limité; rien d'étonnant que, comme première approximation, la même forme représente sensiblement deux propagations : on ne peut rien conclure ni pour ni contre l'identité des deux phénomènes.

Faisons un pas de plus et donnons à ces formes une extension plus grande. Nous avons vu qu'il fallait, pour connaître un phénomène, commencer par déterminer le nombre des quantités mesurables que l'on peut prendre arbitrairement, puis s'attacher à trouver la forme des relations qui existent soit dans l'état statique, soit dans l'état dynamique (état de repos, état de changement) entre ces quantités et

les autres quantités mesurables. Par exemple, pour ce gaz nous avons trouvé que ces quantités arbitraires se réduisent à deux, qui sont, si l'on veut, la pression et la température; le choix, bien entendu, en est arbitraire, pourvu que le nombre des quantités choisies comme variables reste le même.

Or il est inutile de savoir ce que représentent au fond ces quantités arbitraires, pourvu qu'on en puisse déterminer les valeurs numériques à l'aide des quantités directement mesurables. C'est ainsi que nous avons vu que les diverses sortes d'énergie ne sont le plus souvent connues que par leurs valeurs numériques, sans qu'il soit possible d'en faire une détermination directe d'après la définition du travail. Dans ce cas encore nous savons ce que ces valeurs numériques représentent (un travail, une énergie) ; souvent nous ne le savons même plus. Cette ignorance ne nous empêche pas de chercher quel nombre de quantités arbitraires est suffisant pour déterminer complètement un état, et quelles formes mathématiques relient à ces variables telle quantité mesurable que l'on veut. C'est ainsi que Lagrange a pu construire des équations identiques à celles qui exprimaient le principe de d'Alembert, mais où n'apparaissent plus que ces variables absolument indéterminées et l'énergie.

On doit commencer à voir dans quel sens nous avons pu dire que la seule explication des phénomènes réside dans ces formes mathématiques qui les représentent. En définitive, nous sommes réduits à nous contenter d'une représentation symbolique et algorithmique du monde.

TABLE DES MATIÈRES

Tours. — Imp. Deslis Frères, 6, rue Gambetta.

